Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2013-2014

Math IV - PMI Durée : 1 heure et 30 minutes

Partie commune - Devoir numéro 2

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Dans toutes les questions, il sera tenu le plus grand compte de la rigueur de la rédaction ; ***toute réponse insuffisamment justifiée sera considérée comme nulle****.*

Les trois exercices sont indépendants.

Exercice 1. Déterminer, si elle existe, la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de

$$\int_1^n \frac{n}{nx^2 + e^x}\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 2. Soit E un espace euclidien, dont on note $\langle\, , \,\rangle$ le produit scalaire et $\|\ \|$ la norme associée. Soit F un sous-espace vectoriel de E et p_F la projection orthogonale sur F. On veut redémontrer que la distance de x au sous-espace F, notée $d(x,F) = \inf\{\|x-y\| \mid y \in F\}$, est atteinte, en $p_F(x)$.

1. (a) Montrer que pour tout $y \in F$, on a :

$$\|x-y\|^2 = \|x - p_F(x)\|^2 + \|p_F(x) - y\|^2.$$

   (b) En déduire que l'ensemble $\{\|x-y\| \mid y \in F\}$ est minoré.

   (c) Montrer que $d(x,F) = \|x - p_F(x)\|$.

   (d) Montrer que ce minimum n'est atteint qu'en $p_F(x)$.

2. On note $F^\perp$ l'orthogonal de F. Montrer que $d(x,F) = \|p_{F^\perp}(x)\|$.

3. On suppose dans toute la suite que $E = \mathbb{R}_2[X]$ muni de sa base canonique (e_0, e_1, e_2) avec $e_k = X^k$ pour $k \in \{0,1,2\}$. On considère l'application :

$$\varphi : (P,Q) \longmapsto \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}dt.$$

   (a) Montrer que pour tout $P, Q \in E$, $\varphi(P,Q)$ existe.

   (b) Montrer que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$.

   (c) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note $I_k = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^k e^{-t}dt$. Trouver une relation simple entre I_k et I_{k+1} et en déduire que $I_k = k!$.

   (d) On considère le sous-espace vectoriel $F = \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$.

      i. Donner des formules permettant d'obtenir une base orthonormée $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ de F. **On ne demande pas de faire explicitement les calculs.**

      ii. Déterminer une base de $F^\perp$.

   (e) BONUS : En interprétant la valeur minimale de $\displaystyle\int_0^{+\infty} (1 - at - bt^2)^2 e^{-t}\,\mathrm{d}t$ comme le carré d'une distance à un sous-espace vectoriel bien choisi, déterminer la borne inférieure

$$\inf\left\{\int_0^{+\infty} (1 - at - bt^2)^2 e^{-t}dt \mid a, b \in \mathbb{R}\right\}.$$

Exercice 3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction $u_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $u_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{n+1} e^{-(n+1)x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer le domaine D de convergence simple de la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.
2. La série de fonctions $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ converge-t-elle normalement sur $\mathbb{R}_+$?
3. Étudier la convergence uniforme de la série de fonctions sur $\mathbb{R}_+$.
4. (a) Montrer que la fonction S définie par $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0; +\infty[$.

   (b) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, exprimer $S'(x)$ à l'aide de fonctions usuelles.
5. Montrer que S admet une limite lorsque x tend vers $+\infty$ et la calculer.
6. Déduire des questions précédentes l'expression de $S(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$.

Correction du Devoir Surveillé 2 - partie commune

Correction de l'exercice 1 : Pour $n \in \mathbb{N}$, notons

$$f_n : x \in [1;+\infty[\longmapsto \begin{cases} \dfrac{n}{nx^2+e^x} & \text{si } x \in [1;n] \\ 0 & \text{si } x > n \end{cases}$$

de sorte que $\displaystyle\int_1^n \frac{n}{nx^2+e^x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

- Pour tout n, la fonction f_n est continue par morceaux sur $[1;+\infty[$.
- Soit $x \in [1;+\infty[$ fixé. Il existe un rang n_0 à partir duquel $x \in [1:n]$ (il suffit de prendre par exemple $n_0 = [x]+1$, où $[x]$ désigne la partie entière inférieure de x). Pour tout $n \geq n_0$, on a alors

  $$f_n(x_) = \frac{n}{nx^2+e^x} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{nx^2} = \frac{1}{x^2}$$

  donc la suite de fonction $(f_n)_n$ converge simplement sur $[1;+\infty[$ vers la fonction $f : x \in [1;+\infty[\longmapsto \dfrac{1}{x^2}$ continue sur $[1;+\infty[$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in [1;+\infty[$, puisque $e^x \geq 0$, on a

  $$|f_n(x)| \leq \frac{n}{nx^2+e^x} \leq \frac{n}{nx^2} = \frac{1}{x^2}$$

  Notons $g : x \longmapsto \dfrac{1}{x^2}$. La fonction g est continue sur $[1;+\infty[$ et intégrable sur $[1;+\infty[$ (fonction de Riemann d'exposant $2 > 1$).

D'après le théorème de convergence dominée, on en déduit donc que la limite demandée existe et

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \int_1^n \frac{n}{nx^2+e^x}\,\mathrm{d}x &= \lim_{n\to+\infty} \int_1^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_1^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \left[-\frac{1}{x}\right]_1^{+}\infty \\
&= 1
\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 2 :

1. (a) Soit $y \in F$. On peut écrire : $x - y = (x - p_F(x)) + (p_F(x) - y)$. Or $p_F(x) - y \in F$ puisque F est stable par combinaison linéaire. De plus, par construction de la projection orthogonale, on sait aussi que $x - p_F(x) \in F^\perp$, ce qui donne

$$\begin{aligned}
\|x-y\|^2 &= \langle x-y, x-y\rangle \\
&= \langle (x-p_F(x)) + (p_F(x)-y), (x-p_F(x)) + (p_F(x)-y)\rangle \\
&= \langle x-p_F(x), x-p_F(x)\rangle + 2\langle p_F(x)-y, x-p_F(x)\rangle + \langle p_F(x)-y, p_F(x)-y\rangle \\
&= \|x-p_F(x)\|^2 + \|p_F(x)-y\|^2
\end{aligned}$$

On aurait aussi pu utiliser la propriété de Pythagore au lieu de la redémontrer.

(b) On considère l'ensemble $\mathcal{D} = \{d(x,y),\ y \in F\} = \{\|x,y\|,\ y \in F\}$. Pour tout $y \in F$, on a

$$\|x-y\|^2 = \|x-p_F(x)\|^2 + \|p_F(x)-y\|^2 \geq \|x-p_F(x)\|^2$$

d'où (par croissance de la fonction racine sur $\mathbb{R}^+$), $\|x-y\| \geq \|x-p_F(x)\|$ pour tout $y \in F$. Ainsi $\|x-p_F(x)\|$ est un minorant de $\mathcal{D}$.

(c) Comme de plus $p_F(x) \in F$, l'élément $\|x-p_F(x)\|$ appartient à $\mathcal{D}$. Ainsi $\|x-p_F(x)\|$ est le plus petit élément de $\mathcal{D}$,c'est-à-dire son minimum, donc aussi sa borne inférieure.

(d) On a prouvé que pour tout $y \in F$, on a $d(x,y)^2 \geq \|x-p_F(x)\|^2$, avec égalité si et seulement si $\|p_F(x)-y\|^2 = 0$. Par propriété de la norme, cela équivaut encore à $p_F(x)-y = 0_E$ c'est-à-dire $y = p_F(x)$. Ainsi, $p_F(x)$ est l'unique élément de F pour lequel cette distance est atteinte.

2. Puisque E est un espace euclidien, et F un sous-espace vectoriel de E, on a la décomposition $E = F \oplus F^\perp$. Soit $x \in E$, on peut écrire $x = p_F(x) + (x - p_F(x))$ avec $p_F(x) \in F$ et $x - p_F(x) \in F^\perp$, c'est donc la décomposition de x selon la somme directe. Par définition de la projection orthogonale sur un sous-espace, cela démontre que $x - p_F(x) = p_{F^\perp}(x)$. Par suite, on a bien $d(x,F) = \|p_{F^\perp}(x)\|$.

3. (a) On montre que pour tout $P,Q \in E$, $\varphi(P,Q)$ existe, c'est-à-dire que l'intégrale converge. Soit $(P,Q) \in \mathbb{R}_2[X]$. La fonction $t \longmapsto P(t)Q(t)e^{-t}$ est continue sur $[0;+\infty[$, à valeurs positives, donc intégrable sur tout segment inclus dans $[0;+\infty[$. De plus, si l'on note a_nX^n le terme dominant de P, et b_mX^m celui de Q, on obtient $P(t)Q(t)e^{-t} \sim_{t\to+\infty} a_nb_mt^{n+m}e^{-t}$ (ceci étant valable pour P et Q non nuls, mais ce terme vaut trivialement 0 si l'un des deux est nul et ne gênera pas la fin du raisonnement). On montre alors facilement par croissance comparée que $P(t)Q(t)e^{-t} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ lorsque $t \to +\infty$, ce qui montre que la fonction $t \longmapsto P(t)Q(t)e^{-t}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$ et donc sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi $\varphi(P,Q)$ est bien défini.

(b) D'après la question précédente, on a $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$. La bilinéarité de φ découle de la linéarité de l'intégrale et la symétrie est claire. Si $P \in \mathbb{R}_2[X]$, alors $\varphi(P,P) \geq 0$ comme intégrale d'une fonction intégrable à valeurs positives. De plus, si $\varphi(P,P) = 0$, la fonction $t \longmapsto P^2(t)e^{-t}$ est continue, positive, d'intégrale nulle sur $\mathbb{R}^+$, elle est donc nulle sur $\mathbb{R}^+$. Comme pour tout $t \geq 0$, $e^{-t} \neq 0$, on en conclut que $P(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$. Le polynôme P possède donc une infinité de racines dans $\mathbb{R}$, c'est donc le polynôme nul. (Réciproquement, il est clair que si $P = 0_E$, $\varphi(P,P) = 0$.) Ainsi φ est définie, c'est donc un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$.

(c) Soit $k \in \mathbb{N}$. Afin d'obtenir une relation de récurrence entre I_{k+1} et I_k, on fait une intégration par parties, les fonctions $t \longmapsto t^k$ et $t \longmapsto e^{-t}$ étant de classe C^1 :

$$\begin{aligned} I_{k+1} &= \left[-t^{k+1}e^{-t}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty}(k+1)t^ke^{-t}dt \\ &= (k+1)I_k \text{ par croissance comparée pour le terme de bord} \end{aligned}$$

Ainsi la suite $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est définie par $I_{k+1} = (k+1)I_k$ et $I_0 = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}dt = 1$. Une récurrence donne $I_k = k!$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

(d) i. On utilise par exemple le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt. On pose

$$\varepsilon_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|} \quad \text{et } \varepsilon_2 = \frac{e_2 - \varphi(e_2,\varepsilon_1)\varepsilon_1}{\|e_2 - \varphi(e_2,\varepsilon_1)\varepsilon_1\|}$$

Alors $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ est une base orthonormée de F.

ii. Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$, que l'on écrit sous la forme $P = aX^2 + bX + c$. Alors $P \in F^\perp$ si et seulement si $\varphi(P, e_1) = 0$ et $\varphi(P, e_2) = 0$. (En effet, puisque e_1 et e_2 sont dans F, l'implication directe est claire. Réciproquement, tout élément Q de F s'écrit sous la forme $Q = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2$ avec $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, d'où $\varphi(P, \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2) = 0$ par linéarité à droite de φ.)

On calcule en utilisant la linéarité à gauche de φ :

$$\begin{aligned}
\varphi(P, e_1) &= a\varphi(X^2, e_1) + b\varphi(X, e_1) + c\varphi(1, e_1) \\
&= a\int_0^{+\infty} t^2 \times t \times e^{-t} dt + b\int_0^{+\infty} t \times t \times e^{-t} dt + c\int_0^{+\infty} 1 \times t \times e^{-t} dt \\
&= aI_3 + bI_2 + cI_1 \\
&= a \times 3! + b \times 2! + c \times 1! \\
&= 6a + 2b + c
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi(P, e_2) &= a\varphi(X^2, e_2) + b\varphi(X, e_2) + c\varphi(1, e_2) \\
&= a\int_0^{+\infty} t^2 \times t^2 \times e^{-t} dt + b\int_0^{+\infty} t \times t^2 \times e^{-t} dt + c\int_0^{+\infty} 1 \times t^2 \times e^{-t} dt \\
&= aI_4 + bI_3 + cI_2 \\
&= a \times 4! + b \times 3! + c \times 2! \\
&= 24a + 6b + 2c
\end{aligned}$$

Ainsi $P \in F^\perp$ si et seulement si

$$\begin{aligned}
\left\{\begin{array}{lcl} 6a + 2b + c &=& 0 \\ 24a + 6b + 2c &=& 0 \end{array}\right. &\iff \left\{\begin{array}{lcl} 6a + 2b + c &=& 0 \\ 12a + 3b + c &=& 0 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{lcl} 6a + 2b + c &=& 0 \\ 6a + b &=& 0 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{lcl} c &=& -6a - 2b = 6a \\ b &=& -6a \\ a &=& a \end{array}\right. \\
&\iff P = a\left(X^2 - 6X + 6\right) \text{ avec } a \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Comme le polynôme $X^2 - 6X + 6$ est non nul, la famille $(X^2 - 6X + 6)$ forme une base de $F^\perp$.

(e) BONUS : Dans l'espace euclidien $(\mathbb{R}_2[X], \varphi)$, on a :

$$\begin{aligned}
\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^{+\infty} (1 - at - bt^2)^2 e^{-t} dt &= \inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \varphi(1 - aX - bX^2, 1 - aX - bX^2) \\
&= \inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \left\|1 - (aX + bX^2)\right\|^2 \\
&= d^2\left(1, \mathrm{Vect}(e_1, e_2)\right) \\
&= d^2(1, F)
\end{aligned}$$

On utilise alors la formule avec la projection sur $F^\perp$ qui est de dimension 1. On sait que $d(1, F) = \|p_{F^\perp}(1)\|$. La famille $(X^2 - 6X + 6)$ forme une base de $F^\perp$, qui est orthogonale (car ne comporte qu'un seul élément). On la rend orthonormale en divisant par la norme :

$$\begin{aligned}
\varphi\left(X^2-6X+6, X^2-6X+6\right) &= \int_0^{+\infty}(t^2-6t+6)^2 e^{-t}dt \\
&= \int_0^{+\infty}\left(t^4+36t^2+36-12t^3+12t^2-72t\right)e^{-t}dt \\
&= I_4-12I_3+48I_2-72I_1+36I_0 \\
&= 4!-12\times 3!+48\times 2!-72\times 1!+36\times 0! \\
&= 12
\end{aligned}$$

Ainsi la norme du polynôme X^2-6X+6 est $2\sqrt{3}$. Donc une base orthonormée de $F^\perp$ est $\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}(X^2-6X+6)\right)$.
Ainsi la projection de 1 sur $F^\perp$ est :

$$\begin{aligned}
p_{F^\perp}(1) &= \varphi\left(1, \frac{1}{2\sqrt{3}}(X^2-6X+6)\right)\frac{1}{2\sqrt{3}}(X^2-6X+6) \\
&= \frac{1}{12}\varphi(1, X^2-6X+6)(X^2-6X+6) \\
&= \frac{1}{12}\left(\int_0^{+\infty}\left(t^2-6t+6\right)e^{-t}dt\right)(X^2-6X+6) \\
&= \frac{1}{12}\left(I_2-6I_1+6I_0\right)(X^2-6X+6) \\
&= \frac{1}{12}\left(2!-6\times 1!+6\times 0!\right)(X^2-6X+6) \\
&= \frac{1}{6}\left(X^2-6X+6\right)
\end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}
\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2}\int_0^{+\infty}(1-at-bt^2)^2e^{-t}dt &= \|p_{F^\perp}(1)\|^2 \\
&= \frac{1}{6^2}\|X^2-6X+6\|^2 \\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 3 :

1. Soit $x\in\mathbb{R}$ fixé.
   - Si $x\geq 0$, alors $u_n(x)=\dfrac{(-1)^n e^{-(n+1)x}}{n+1}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. Or la série numérique de terme général $\dfrac{(-1)^n e^{-(n+1)x}}{n+1}$ converge par le critère spécial des séries alternées puisque la suite numérique $\left(\dfrac{e^{-(n+1)x}}{n+1}\right)_n$ converge vers 0 en décroissant (produit de deux suites positives décroissantes).
   - Si $x<0$, alors $|u_n(x)|=\dfrac{e^{-(n+1)x}}{n+1}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. Par croissance comparée (car $x>0$), on voit que $|u_n(x)|$ tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$. Le terme général $u_n(x)$ ne converge donc pas vers 0 ce qui montre que la série $\sum u_n(x)$ diverge grossièrement. Ainsi, le domaine de convergence simple de la série de fonctions $\sum u_n$ est $\mathbb{R}_+$.
2. On a $\sup_{x\in\mathbb{R}_+}|u_n(x)|\geq|u_n(0)|=\dfrac{1}{n+1}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. Comme la série harmonique diverge, la série de fonctions de terme général u_n ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}_+$ par comparaison de séries à termes positifs.
3. On montre que la série de fonctions de terme général u_n converge uniformément en utilisant le critère spécial uniforme des séries alternées.

- Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ fixé, la suite $\left(\dfrac{(-1)^n e^{-(n+1)x}}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est alternée.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ fixé, la suite $\left(\dfrac{e^{-nx}}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
- Comme $\left|\dfrac{e^{-(n+1)x}}{n+1}\right| \leq \dfrac{1}{n+1}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}$, on en déduit que $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}^+} |u_n(x)| \leq \dfrac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc la suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $g_n : x \in \mathbb{R}^+ \longmapsto \dfrac{e^{-(n+1)x}}{n+1}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}_+$.

Le critère spécial uniforme des séries alternées montre que la série de fonctions de terme général u_n converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$.

4. (a) On utilise le théorème de dérivation des séries de fonctions.
   - Les fonctions u_n sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et on a $u_n'(x) = (-1)^{n+1}e^{-(n+1)x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}$.
   - La série de fonctions de terme général u_n converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.
   - Soit $a > 0$. On a $|u_n'(x)| \leq e^{-(n+1)a} = e^{-a}(e^{-a})^n$ pour tout $x \in [a;+\infty[$ et $n \in \mathbb{N}$. Comme la série numérique de terme général e^{-na} est une série géométrique de raison e^{-a} avec $|e^{-a}| < 1$, elle converge, donc $\sum \sup\limits_{x\in[a;+\infty[} |u_n'(x)|$ converge. Par suite, la série de fonctions de terme général u_n' converge normalement donc uniformément sur $[a;+\infty[$.

   Pour tout $a > 0$, le théorème de dérivation des séries de fonctions montre que la somme de la série de fonctions de terme général u_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a;+\infty[$. Cela étant valable pour tout $a > 0$, on obtient le résultat sur $]0;+\infty[$. De plus, on a pour tout $x > 0$:

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1}e^{-(n+1)x} = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n e^{-nx}.$$

   (b) Pour tout $x > 0$, on obtient alors

$$\begin{aligned} S'(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n e^{-nx} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}(-e^{-x})^n \\ &= -e^{-x}\frac{1}{1+e^{-x}} \text{ car } |-e^{-x}| < 1 \end{aligned}$$

5. On utilise le théorème d'échange limite/série afin de prouver l'existence de la limite de S en $+\infty$:
   - Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (-1)^n \dfrac{e^{-(n+1)x}}{n+1} = 0$.
   - On a vu que la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$.

   Alors la série numérique de terme général $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n(x)$ converge (évident) et S admet une limite en $+\infty$, donnée par :

$$\lim_{x\to+\infty} S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x\to+\infty} u_n(x) = 0.$$

6. On cherche à déterminer explicitement $S(x)$ pour $x \geq 0$. Comme S est dérivable sur $]0;+\infty[$ de dérivée $S'(x) = -e^{-x}\dfrac{1}{1+e^{-x}}$, il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in]0;+\infty[$, on a :

$$S(x) = \ln\left(1 + e^{-x}\right) + C.$$

Comme chacune des fonctions u_n est continue sur $[0;+\infty[$, la convergence uniforme de $\sum u_n$ sur $[0;+\infty[$ montre que la fonction S est continue sur $\mathbb{R}_+$ et donc que $F(x) = \ln(1+e^{-x}) + C$ pour tout $x \geq 0$.

Enfin, il reste à déterminer C. D'une part, on a vu à la question 5 que $\lim_{x\to+\infty} S(x) = 0$. D'autre part, $\lim_{x\to+\infty} S(x) = \lim_{x\to+\infty} \ln\left(1+e^{-x}\right) + C = C$, donc $C = 0$.
Finalement, on trouve $S(x) = \ln(1+e^{-x})$ pour tout $x \geq 0$.