Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre d'automne 2013-2014

Math III - PMI Durée : 1 heure et 30 minutes

Partie CCP - Devoir numéro 2

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Dans toutes les questions, il sera tenu le plus grand compte de la rigueur de la rédaction ; ***toute réponse insuffisamment justifiée sera considérée comme nulle****.*

Problème 1. Étude d'une série produit

Si $S_a = \sum_{n\geq 1} a_n$ et $S_b = \sum_{n\geq 1} b_n$ sont deux séries convergentes, on appelle série produit de S_a par S_b la série $\sum_{n\geq 2} c_n$ où $c_n = \sum_{k=1}^{n-1} a_k b_{n-k}$ pour tout $n \geq 2$. Le but de ce problème est d'étudier la nature de la série produit de $S_\alpha = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ par elle-même, pour un réel α quelconque.

1. *Équivalent de la série harmonique*

   Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Cela définit la série harmonique.

   (a) Montrer qu'une suite $(u_n)_{n\geq 1}$ converge si et seulement si la série $\sum_{n\geq 1}(u_{n+1} - u_n)$ converge.

   (b) Justifier qu'au voisinage de $+\infty$, on a $\frac{1}{n+1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

   (c) On pose désormais $u_n = H_n - \ln n$. Montrer que $u_{n+1} - u_n$ est équivalent lorsque n tend vers $+\infty$, à une expression de la forme $\frac{p}{n^q}$ où p et q sont deux réels à déterminer.

   (d) En déduire la nature de la suite $(u_n)_n$ et enfin un équivalent simple de H_n lorsque n tend vers $+\infty$.

   (e) Retrouver l'équivalent de $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ à l'aide d'une comparaison série/intégrale.

2. *Une série produit*

   Pour quelles valeurs de α la série S_α converge-t-elle ? Jusqu'à la fin de l'exercice, on choisit α de la sorte.

   On considère $\sum_{n\geq 2} c_n$ la série produit de S_α par S_α.

3. Jusqu'à la fin de l'exercice, on considère un entier $n \geq 2$.

   (a) Déterminer le maximum de la fonction $x \longmapsto x(n-x)$ définie sur $\mathbb{R}$.

   (b) En déduire que $|c_n| \geq \frac{4^\alpha (n-1)}{n^{2\alpha}}$.

   (c) Conclure que pour $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$, la série $\sum_{n\geq 2} c_n$ diverge.

4. On suppose désormais que $\alpha = 1$.

   (a) Décomposer en éléments simples la fraction rationelle $F(X) = \frac{1}{X(n-X)}$.

   (b) En déduire une expression de c_n en fonction de $\frac{H_{n-1}}{n}$.

   (c) Déterminer la monotonie de la suite $\left(\frac{H_{n-1}}{n}\right)_{n\geq 2}$.

   (d) En déduire la nature de la série $\sum_{n\geq 2} c_n$.

5. *Une règle plus générale*

On suppose désormais que les séries $S_a = \sum_{n\geq 1} a_n$ et $S_b = \sum_{n\geq 1} b_n$ sont des séries à termes positifs convergentes.

On introduit , pour $N \geq 2$, les ensembles suivants :

$$C_N = \{(p,q) \in \mathbb{N}^* \mid p \leq N, q \leq N\} \quad \text{et } T_N = \{(p,q) \in \mathbb{N}^* \mid p+q \leq N\}.$$

(a) Exprimer la somme $\displaystyle\sum_{(p,q)\in C_N} a_p b_q$ en fonction des sommes partielles de S_a et de S_b.

Montrer que la somme $\displaystyle\sum_{(p,q)\in T_N} a_p b_q$ est égale à $\displaystyle\sum_{n=2}^{N} c_n$.

(b) Comparer les ensembles C_N et T_N. En déduire que la série $\sum c_n$ converge, et que

$$\sum_{n=2}^{+\infty} c_n \leq \left(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=1}^{+\infty} b_n\right).$$

(c) Comparer les ensembles C_N et T_{2N}. En déduire que

$$\left(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=1}^{+\infty} b_n\right) \leq \sum_{n=2}^{+\infty} c_n.$$

(d) Quel théorème vient-on de démontrer ?

(e) Que peut-on en déduire sur la nature de la série produit de S_α par elle-même dans le cas $\alpha > 1$?

(f) *Application :* Soit $x \in [0;1[$. À l'aide d'une série produit, exprimer $\dfrac{1}{(1-x)^2}$ comme la somme d'une série numérique.

Indication : si les termes des séries concernées commencent à $n = 0$ au lieu de $n = 1$, on pourra adapter le résultat démontré précemment en remarquant que $c_n = \displaystyle\sum_{p+q=n} a_p b_q = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.

Correction du Devoir Surveillé 2 - partie CCP

Correction du problème 1

1. (a) Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Par définition, la série $\sum_{n\geq 1}(u_{n+1}-u_n)$ converge si et seulement si la suite des sommes partielles $(S_N)_{N\geq 1}$, où $S_N = \sum_{n=1}^{N}(u_{n+1}-u_n)$ converge. Or il s'agit d'une somme téléscopique, un simple changement d'indice donne $S_N = u_{N+1}-u_1$. Par suite, la série $\sum_{n\geq 1}(u_{n+1}-u_n)$ converge si et seulement si la suite $(u_{N+1}-u_1)_N$ converge, ce qui équivaut à la convergence de la suite $(u_{N+1})_N$ puisque u_1 est une constante. Comme la suite $(u_{N+1})_N$ converge si et seulement si $(u_N)_N$ converge, on obtient l'équivalence demandée.

   (b) On met en facteur le terme dominant au dénominateur :
$$\frac{1}{n+1} = \frac{1}{n}\frac{1}{1+1/n} = \frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}+o_{+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}+o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

   (c) On a
$$\begin{aligned} u_{n+1}-u_n &= H_{n+1}-\ln n+1-(H_n-\ln n) = \frac{1}{n+1}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}+o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)-\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= -\frac{1}{2n^2}+o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$
   Ainsi, $u_{n+1}-u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{p}{n^q}$ avec $p=-\frac{1}{2}$ et $q=2$.

   (d) On vient de montrer que $-(u_{n+1}-u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$. Puisque la série $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann d'exposant $2>1$, elle converge. Par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum -(u_{n+1}-u_n)$ converge, et donc la série $\sum(u_{n+1}-u_n)$ converge. Puisque celle-ci converge si et seulement si la suite $(u_n)_n$ converge, on en conclut que la suite $(u_n)_n$ converge vers un réel γ.

   Comme de plus, $u_n = H_n - \ln n$, on obtient $u_n = \gamma + o_{+\infty}(1)$, donc $H_n = \ln n + \gamma + o_{+\infty}(1)$, et $H_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$.

   (e) On va chercher à retrouver cet équivalent à l'aide d'une comparaison série-intégrale. La fonction $f : t \longmapsto \frac{1}{t}$ est continue, décroissante, et à valeurs positives sur $]0;+\infty[$. Soit $k\in\mathbb{N}^*$. Par décroissance de f sur $[k;k+1]$, on a $f(k+1)\leq f(t)\leq f(k)$ pour tout $t\in[k;k+1]$, d'où en intégrant cette inégalité sur $[k;k+1]$:
$$\int_k^{k+1} f(k+1)\,\mathrm{d}t \leq \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \int_k^{k+1} f(k)\,\mathrm{d}t$$
$$\text{d'où}\quad f(k+1)\leq \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leq f(k).(*)$$
   En sommant la partie de gauche de l'inégalité de $k=1$ à $n-1$ (pour $n\geq 2$ fixé), on obtient
$$\sum_{k=2}^{n} f(k) \leq \int_1^n f(t)\,\mathrm{d}t$$
   ce qui implique
$$H_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \leq \int_1^n \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t + 1 = [\ln(t)]_1^n + 1 = \ln n + 1.$$

En sommant la partie de droite de l'inégalité $(*)$ de $k=1$ à n, on trouve

$$\int_1^{n+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = [\ln(t)]_1^{n+1} = \ln(n+1) \leq H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

ce qui donne l'encadrement

$$\ln(n+1) \leq H_n \leq \ln(n) + 1.$$

En divisant ceci par $\ln n$, et en passant à la limite quand $n \to +\infty$, le théorème des gendarmes entraîne $\frac{H_n}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, et donc $H_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$.

2. Si $\alpha > 0$, on a $\left|\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right| = \frac{1}{n^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, donc le terme général de la série S_α ne tend pas vers 0, et ainsi la série S_α diverge grossièrement.
De même, si $\alpha = 0$, on a $\frac{(-1)^n}{n^\alpha} = (-1)^n$ n'admet pas de limite quand n tend vers $+\infty$, et ainsi la série S_α diverge aussi grossièrement.
Si $\alpha > 0$, démontrons que la série alternée S_α vérifie le théorème des séries alternées. La suite $\left(\left|\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right|\right)_n = \left(\frac{1}{n^\alpha}\right)_n$ est une suite décroissante puisque la fonction $t \longmapsto t^\alpha$ est croissante sur $]0;+\infty[$ (pour le voir, il suffit d'étudier sa dérivée). De plus, elle tend vers 0 quand $n \to +\infty$, donc S_α converge d'après le théorème des séries alternées.
En résumé, la série S_α converge si et seulement si $\alpha > 0$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.
   (a) La fonction $g : x \longmapsto x(n-x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $g' : x \longmapsto n - 2x$, qui est positive sur $]-\infty; n/2]$ et négative sur $[n/2;+\infty[$. Par suite, g est croissante sur $]-\infty; n/2]$ et décroissante sur $[n/2;+\infty[$. Puisque de plus $\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = -\infty$, on en déduit que g atteint son maximum en $x = \frac{n}{2}$ et que celui-ci vaut $\frac{n^2}{4}$.
   (b) On a

$$\begin{aligned} |c_n| &= \left|\sum_{k=1}^{n-1} a_k b_{n-k}\right| = \left|\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k^\alpha}\frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)^\alpha}\right| \\ &= \left|(-1)^n \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{(k(n-k))^\alpha}\right| \\ &= \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{(k(n-k))^\alpha} \geq \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{(n^2/4)^\alpha} = \frac{4^\alpha}{n^{2\alpha}} \sum_{k=1}^{n-1} 1 = \frac{4^\alpha(n-1)}{n^{2\alpha}}. \end{aligned}$$

   (c) Soit $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$, alors

$$\frac{4^\alpha(n-1)}{n^{2\alpha}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{4^\alpha}{n^{2\alpha-1}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} +\infty \text{ si } \alpha < \frac{1}{2}, \\ 2 \text{ si } \alpha = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

   Dans tous les cas, le terme c_n ne peut pas tendre vers 0 quand n tend vers $+\infty$, donc la série $\sum c_n$ diverge grossièrement.

4. On suppose dans cette question que $\alpha = 1$.
   (a) La décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle F est de la forme $F(X) = \frac{a}{X} + \frac{b}{n-X}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$. Pour trouver a, on multiplie F par X et on évalue le résultat en $X = 0$, ec qui donne $a = \frac{1}{n}$. Pour b, on multiplie F par $(n-X)$ et on évalue le résultat en $X = n$, d'où $b = \frac{1}{n}$ aussi.

(b) En utilisant cette décomposition, on a alors

$$c_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k} \frac{(-1)^{n-k}}{n-k} = (-1)^n \sum_{k=1}^{n-1} F(k) = \frac{(-1)^n}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k} \right) = \frac{(-1)^n 2H_{n-1}}{n}.$$

(c) On étudie la monotonie de la suite $\left(\frac{H_{n-1}}{n} \right)_{n \geq 2}$. Pour cela, on calcule

$$\frac{H_n}{n+1} - \frac{H_{n-1}}{n} = \frac{nH_n - (n+1)H_{n+1}}{n(n+1)} = \frac{n(H_{n-1} + 1/n) - (n+1)H_{n-1}}{n(n+1)} = \frac{1 - H_{n-1}}{n(n+1)} \leq 0$$

Donc la suite $\left(\frac{H_{n-1}}{n} \right)_{n \geq 2}$ est décroissante.

(d) Comme pour tout $n \geq 2$, on a $c_n = (-1)^n \frac{2H_{n-1}}{n}$, la série $\sum c_n$ est une série alternée. De plus, la suite $\left(\frac{2H_{n-1}}{n} \right)_{n \geq 2}$ est décroissante d'après la question précédente. Pour appliquer le théorème des séries alternées, il reste donc à étudier la limite de cette suite. On a

$$\frac{2H_{n-1}}{n} \underset{n \to}{\sim} \frac{2\ln(n-1)}{n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ par croissance comparée,}$$

on peut donc appliquer le théorème des séries alternées, qui entraîne la convergence de la série $\sum_{n \geq 2} c_n$.

5. (a) On a

$$\sum_{(p,q) \in C_N} a_p b_q = \sum_{1 \leq p \leq N, 1 \leq q \leq N} a_p b_q = \sum_{p=1}^{N} a_p \sum_{q=1}^{N} b_q \quad \text{et} \quad \sum_{(p,q) \in T_N} a_p b_q = \sum_{l=2}^{N} \sum_{p+q=l} a_p b_q = \sum_{l=2}^{N} c_l.$$

(b) On a clairement : si $(p, q) \in T_N$, alors $p + q \leq N$, donc en particulier $p \leq N$ et $q \leq N$. Ainsi, l'ensemble T_N est inclus dans l'ensemble C_N. Puisque les termes $a_p b_q$ sont tous positifs, on obtient alors

$$\sum_{n=2}^{N} c_n = \sum_{(p,q) \in T_N} a_p b_q \leq \sum_{(p,q) \in C_N} a_p b_q = \sum_{p=1}^{N} a_p \sum_{q=1}^{N} b_q \leq \left(\sum_{p=1}^{+\infty} a_p \right) \left(\sum_{q=1}^{+\infty} b_q \right).$$

La suite des sommes partielles $\sum_{n=2}^{N} c_n$ est une suite croissante (car $c_n \geq 0$) et majorée, donc elle converge. Par conséquent, la série $\sum c_n$ converge. En passant à la limite quand N tend vers $+\infty$,

$$\sum_{n=2}^{+\infty} c_n \leq \left(\sum_{p=1}^{+\infty} a_p \right) \left(\sum_{q=1}^{+\infty} b_q \right).$$

(c) Soit $(p, q) \in C_N$, alors $1 \leq p \leq N$ et $1 \leq q \leq N$, d'où $p + q \leq 2N$ et ainsi $(p, q) \in T_{2N}$. Par suite, on a $C_N \subset T_{2N}$. On trouve alors

$$\sum_{(p,q) \in C_N} a_p b_q = \sum_{p=1}^{N} a_p \sum_{q=1}^{N} b_q \leq \sum_{(p,q) \in T_{2N}} a_p b_q = \sum_{n=2}^{2N} c_n$$

et en passant à la limite quand N tend vers $+\infty$, comme tous els quantités en jeu converge,

$$\left(\sum_{p=1}^{+\infty} a_p \right) \left(\sum_{q=1}^{+\infty} b_q \right) \leq \sum_{n=2}^{+\infty} c_n$$

(d) On vient de démontrer que si S_a et S_b sont deux séries à termes positifs convergentes, alors la série produit est aussi convergente et sa somme est le produit des sommes des séries S_a et S_b.

(e) Si $\alpha > 1$, la série S_α est absolument convergente. Par suite, on peut appliquer le théorème que l'on vient de démontrer à la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ et ainsi prouver que la série produit de S_α par elle-même est absolument convergente, donc convergente (puisque $|c_n| = \left|\sum_{k=1}^{n-1} a_k b_{n-k}\right| \leq \sum_{k=1}^{n-1} |a_k||b_{n-k}|$ qui est le terme général d'une série convergente.)

(f) Soit $x \in [0;1[$, alors on a

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{1}{1-x}\frac{1}{1-x} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right).$$

Puisque la série $\sum x^n$ est une série géométrique à termes positifs convergente, on a d'après ce que l'on a démontré précédemment,

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} x^k x^{n-k}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)x^n.$$