Partie CCP - Devoir numéro 2

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Dans toutes les questions, il sera tenu le plus grand compte de la rigueur de la rédaction ; ***toute réponse insuffisamment justifiée sera considérée comme nulle****.*

AUTOUR DE LA FONCTION ZETA ALTERNÉE DE RIEMANN

Objectifs : On note F la fonction zeta alternée de Riemann, définie par

$$F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x},$$

et ζ la fonction zeta de Riemann, définie sur $]1, +\infty[$ par

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}.$$

Ce problème propose une étude croisée de quelques propriétés de F et ζ.

I. Généralités

1. Déterminer l'ensemble de définition de F.
2. On considère la suite de fonctions $(g_n)_{n\geq 1}$ définies sur $[0, 1[$ par $g_n(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-t)^k$.
   (a) Déterminer la limite simple g de $(g_n)_n$.
   (b) En utilisant le théorème de convergence dominée, montrer que $F(1) = \displaystyle\int_0^1 g(t)\ \mathrm{d}t$.
   (c) En déduire la valeur de $F(1)$.
3. (a) Démontrer que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ converge normalement sur $[2, +\infty[$.
   (b) En déduire la limite de F en $+\infty$.
4. *Dérivabilité de F*
   (a) Soit $x > 0$. Étudier les variations sur $]0, +\infty[$ de la fonction $t \mapsto \dfrac{\ln t}{t^x}$ et en déduire que la suite $\left(\dfrac{\ln n}{n^x}\right)_{n\geq 1}$ est monotone à partir d'un certain rang (dépendant de x) que l'on précisera.
   (b) Pour $n \geq 1$, on pose $f_n : x \mapsto \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^x}$.
      i. Si a est un réel strictement positif, démontrer que la série des dérivées $\displaystyle\sum_{n\geq 1} f_n'$ converge uniformément sur $[a, +\infty[$.
      ii. En déduire que F est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.
5. *Lien avec ζ*
   (a) Calculer, pour $x > 1$, $F(x) - \zeta(x)$ en fonction de x et de $\zeta(x)$. En déduire que :
   $$F(x) = (1 - 2^{1-x})\zeta(x).$$
   (b) Puis en déduire la limite de ζ en $+\infty$.

II. Calcul de la somme d'une série à l'aide d'une étude de ζ au voisinage de 1

6. *Développement asymptotique en 1*

   (a) i. Écrire en fonction de $\ln 2$ et de $F'(1)$ le développement limité à l'ordre 1 et au voisinage de 1 de la fonction F. (On justifiera son existence.)

   ii. Déterminer le développement limité à l'ordre 2 et au voisinage de 1 de la fonction $x \mapsto 1 - 2^{1-x}$.

   (b) En déduire deux réels a et b, qui s'écrivent éventuellement à l'aide de $\ln 2$ et $F'(1)$, tels que l'on ait, pour x au voisinage de 1^+ :

$$\zeta(x) = \frac{a}{x-1} + b + o(1).$$

7. *Développement asymptotique en 1 (bis)*

   On considère la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 1} v_n$, où v_n est définie sur $[1,2]$ par

$$v_n(x) = \frac{1}{n^x} - \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^x}.$$

   (a) Justifier que, pour $n \geq 1$ et $x \in [1,2]$, on a :

$$0 \leq v_n(x) \leq \frac{1}{n^x} - \frac{1}{(n+1)^x}.$$

   (b) Justifier que, pour $x \in [1,2]$, la série $\sum\limits_{n\geq 1} v_n(x)$ converge. On note alors $\gamma = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n(1)$ (c'est la constante d'Euler).

   (c) Exprimer, pour $x \in]1,2]$, la somme $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n(x)$ à l'aide de $\zeta(x)$ et $1-x$.

   (d) Démontrer que la série $\sum\limits_{n\geq 1} v_n$ converge uniformément sur $[1,2]$ (on pourra utiliser le reste de la série).

   (e) i. Soit $n \geq 1$. En calculant explicitement la valeur de $v_n(x)$ pour $x \in [1;2]$, montrer que v_n est continue sur $[1;2]$. Que peut-on conclure sur la fonction somme $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n$?

   ii. En déduire que l'on a, pour x au voisinage de 1^+ :

$$\zeta(x) = \frac{1}{x-1} + \gamma + o(1).$$

8. *Application*

   Déduire des résultats précédents une expression, à l'aide de $\ln 2$ et γ, de la somme

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} \ln n}{n}.$$

Correction du Devoir Surveillé 2 - partie CCP

I. Généralités

1. Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. Si $x > 0$, alors la suite $\left(\dfrac{1}{n^x}\right)_{n\geq 1}$ tend vers 0 en décroissant ; donc la série alternée $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ converge d'après le critère des séries alternées.

   Si $x \leq 0$, la suite $\left(\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^x}\right)_{n\geq 1}$ ne converge pas vers 0, donc la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ diverge (grossièrement).

   Ainsi, le domaine de définition de F est $]0; +\infty[$.

2. (a) Soit $t \in [0; 1[$. Comme $|-t| < 1$, la série géométrique $\sum (-t)^n$ converge et sa somme vaut

   $$\sum_{k=0}^{+\infty} (-t)^k = \frac{1}{1-(-t)} = \frac{1}{1+t}$$

   Par définition de la convergence d'une série numérique, on en déduit que la suite $(g_n(t))_n$ converge, donc la suite de fonctions (g_n) converge simplement vers la fonction $g : t \mapsto \dfrac{1}{1+t}$ sur $[0, 1[$.

   (b)
   - La suite (g_n) converge simplement vers la fonction g sur $[0, 1[$;
   - la fonction g et les fonctions $g_n,\ n \in \mathbb{N}$ sont continues (par morceaux) ;
   - *condition de domination* : $\forall t \in [0, 1[$, on a

   $$|g_n(t)| = \left|\frac{1-(-t)^{n+1}}{1+t}\right| = \frac{1-(-t)^{n+1}}{1+t} \leq \frac{2}{1+t} := \phi(t)$$

   La fonction ϕ est indépendante de n, continue sur $[0, 1]$ donc intégrable sur $[0, 1]$ (et a fortiori sur $[0; 1[$).

   D'après le théorème de convergence dominée, la suite $\left(\displaystyle\int_0^1 g_n(t)\,\mathrm{d}t\right)$ converge vers $\displaystyle\int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t$.

   (c) Un simple calcul donne

   $$\int_0^1 g_n(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

   donc $F(1) = \displaystyle\int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t = \Big[\ln(1+t)\Big]_0^1 = \ln 2.$

3. (a) Pour tout $n \geq 1$, pour tout $x \geq 2$, on a $\left|\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^x}\right| \leq \dfrac{1}{n^2}$. Ceci étant indépendant de x, on en déduit que la fonction $x \longmapsto \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ est bornée et son sup vérifie : $\displaystyle\sup_{x\geq 2}\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n^x}\right| \leq \frac{1}{n^2}$. Puisque la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ est convergente, par comparaison de séries à termes positifs, la série $\displaystyle\sum \sup_{x\geq 2}\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n^x}\right|$ converge et ainsi la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ converge normalement sur $[2, +\infty[$.

   (b) On en déduit qu'elle converge uniformément sur $[2, +\infty[$. Comme, pour tout $n \geq 2$, $\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ et que, pour $n = 1$, $\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^x} = 1 \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$, le théorème d'interversion limite/série permet d'affirmer que

   $$F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x\to+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x} = 1.$$

4. *Dérivabilité de F*

(a) Soit $x > 0$. La fonction $h_x : t \mapsto \dfrac{\ln t}{t^x}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$ et pour tout $t > 0$, on a $h_x'(t) = \dfrac{t^{x-1}(1 - x\ln t)}{t^{2x}}$. Donc h_x' est négative sur l'intervalle $[e^{1/x}, +\infty[$ et positive sur $]0, e^{1/x}]$. Ainsi, h_x est décroissante sur $[e^{1/x}, +\infty[$ et croissante sur $]0, e^{1/x}]$.
On en déduit que la suite $\left(\dfrac{\ln n}{n^x}\right)_{n\geq 1}$ est décroissante à partir du rang $\mathrm{E}\left(e^{1/x}\right) + 1$, où $E(e^{1/x})$ désigne la partie entière inférieure de $e^{1/x}$.

(b) Pour tout $n \geq 1$, la fonction $f_n : x \mapsto (-1)^{n-1}e^{-x\ln n}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et $f_n'(x) = (-1)^n \dfrac{\ln n}{n^x}$ pour tout $x \geq 0$.

i. Soit $a > 0$. On pose $N_a = \mathrm{E}\left(e^{1/a}\right) + 1$. Pour tout $x \geq a$, la suite $\left(\dfrac{\ln n}{n^x}\right)_{n\geq N_a}$ tend vers 0 en décroissant ; donc la série alternée $\displaystyle\sum_{n\geq N_a} f_n'(x)$ converge d'après le critère des séries alternées. De plus, pour $n \geq N_a$, son reste d'ordre n, $\rho_n(x)$, vérifie :

$$|\rho_n(x)| \leq \left|(-1)^{n+1}\frac{\ln(n+1)}{(n+1)^x}\right| \leq \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^a}.$$

Donc $\displaystyle\sup_{x\geq a}|\rho_n(x)| \leq \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^a} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ par croissance comparée, ce qui démontre que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} f_n'$ converge uniformément sur $[a, +\infty[$.

ii. • Pour tout $n \geq 1$, la fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$;

• la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} f_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$ et sa somme est F ;

• la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} f_n'$ converge uniformément sur tout segment inclus dans $]0, +\infty[$ (car n'importe quel segment de $]0; +\infty[$ peut être inclus dans $]a; +\infty[$ pour un certain $a > 0$)

D'après le théorème de dérivation terme à terme, F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et

$$\forall x > 0,\ F'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{n^x}.$$

5. *Lien avec ζ*

(a) Pour $x > 1$, on a

$$F(x) - \zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1} - 1}{n^x} = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{-2}{(2k)^x} = -2^{1-x}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^x} = -2^{1-x}\zeta(x).$$

On en déduit l'égalité : $F(x) = (1 - 2^{1-x})\zeta(x)$.

(b) Comme $2^{1-x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, $F(x) \sim \zeta(x)$ au voisinage de $+\infty$ et donc $\zeta(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$.

II. Calcul de la somme d'une série à l'aide d'une étude de ζ au voisinage de 1

6. *Développement asymptotique en 1*

(a) i. On pose $h = x - 1$. Comme F est dérivable en 1, au voisinage de 1, on a :

$$F(x) = F(1) + hF'(1) + o(h) = \ln 2 + (x-1)F'(1) + o_{x\to 1}(x-1).$$

ii. Avec les mêmes notations que ci-dessus, on a aussi :

$$1-2^{1-x}=1-e^{-h\ln 2}=h\ln 2-\frac{(\ln 2)^2}{2}h^2+o(h^2)=(x-1)\ln 2-\frac{(\ln 2)^2}{2}(x-1)^2+o((x-1)^2)$$

au voisinage de $x=1$.

(b) *Développement de ζ*

Toujours avec $h=x-1$, pour $x\to 1^+$, on a $h\to 0$ et

$$\begin{aligned}
\zeta(x) &= \frac{F(x)}{1-2^{1-x}}\\
&= \frac{\ln 2+hF'(1)+o(h)}{h\ln 2-\dfrac{\ln^2 2}{2}h^2+o(h^2)}\\
&= \frac{1}{h\ln 2}\frac{\ln 2+hF'(1)+o(h)}{1-\dfrac{\ln 2}{2}h+o(h)}\\
&= \frac{1}{h\ln 2}(\ln 2+hF'(1)+o(h))\left(1+\frac{\ln 2}{2}h+o(h)\right)\\
&= \frac{1}{h\ln 2}\left(\ln 2+h\left(F'(1)+\frac{(\ln 2)^2}{2}\right)+o(h)\right)\\
&= \frac{1}{h}+\left(\frac{F'(1)}{\ln 2}+\frac{\ln 2}{2}\right)+o(1)\\
&= \frac{1}{x-1}+\left(\frac{F'(1)}{\ln 2}+\frac{\ln 2}{2}\right)+o_{x\to 1^+}(1)
\end{aligned}$$

7. *Développement asymptotique en 1 (bis)*

(a) Pour $n\geq 1$ et $x\in[1,2]$, la fonction $t\mapsto\dfrac{1}{t^x}$ est décroissante sur $[n,n+1]$ (qui est un intervalle de longueur 1), d'où l'encadrement

$$\frac{1}{(n+1)^x}=\int_n^{n+1}\frac{1}{(n+1)^x}\mathrm{d}t\leq\int_n^{n+1}\frac{\mathrm{d}t}{t^x}\leq\int_n^{n+1}\frac{1}{n^x}\mathrm{d}t=\frac{1}{n^x}.$$

On en déduit le résultat voulu : $0\leq v_n(x)\leq\dfrac{1}{n^x}-\dfrac{1}{(n+1)^x}$.

(b) Pour $x\in[1,2]$, la suite $\left(\dfrac{1}{n^x}\right)_{n\geq 1}$ converge (vers 0) ; comme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k^x}-\frac{1}{(k+1)^x}\right)=1-\frac{1}{(n+1)^x}$, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{n^x}-\frac{1}{(n+1)^x}\right)$ converge (c'est une série téléscopique). De l'encadrement du (a), on déduit par comparaison de séries à termes positifs la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}v_n(x)$.

(c) Pour $x\in]1,2]$, pour $n\geq 1$, on a

$$\sum_{k=1}^{n}v_k(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^x}-\int_1^{n+1}\frac{\mathrm{d}t}{t^x}\xrightarrow[n\to+\infty]{}\zeta(x)-\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^x}=\zeta(x)-\frac{1}{x-1}$$

ce qui montre que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}v_k(x)=\zeta(x)-\frac{1}{x-1}$.

(d) La série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}v_n$ converge simplement sur $[1,2]$, ainsi la série $\sum v_n$ converge uniformément sur $[1;2]$ si et seulement si la suite des restes converge uniformément vers la fonction nulle sur $[1;2]$. Pour tout $x\in[1;2]$, notons $R_n(x)=\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}v_k(x)$ le reste d'ordre n de la série. D'après (a), on a l'encadrement

$$0\leq R_n(x)\leq\sum_{k=n+1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k^x}-\frac{1}{(k+1)^x}\right)=\frac{1}{(n+1)^x}-\lim_{k\to+\infty}\frac{1}{k^x}=\frac{1}{(n+1)^x}.$$

Donc

$$\sup_{x\in[1,2]} |R_n(x)| \leq \frac{1}{(n+1)^1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Par conséquent, la série $\sum_{n\geq 1} v_n$ converge uniformément sur $[1,2]$.

(e) i. Soit $n \geq 1$. Pour $x \in]1,2]$, le calcul de l'intégrale donne

$$v_n(x) = \frac{1}{n^x} - \frac{1}{1-x}\left(\frac{1}{n^{x-1}} - \frac{1}{(n+1)^{x-1}}\right)$$

et $v_n(1) = \frac{1}{n} - \ln(n+1) + \ln n$. On peut donc en conclure que v_n est continue sur $]1;2]$.

Étudions sa continuité en 1 : on sait que $\frac{1}{n^x} = \frac{1}{n} + o(1)$ par continuité de l'exponentielle $x \mapsto n^{-x}$ en 1. De plus,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n^{x-1}} - \frac{1}{(n+1)^{x-1}} &= e^{(1-x)\ln n} - e^{-(1-x)\ln(n+1)} \\
&= e^{(1-x)\ln n}\left(1 - e^{(1-x)\ln(1+1/n)}\right) \\
&= e^{(1-x)\ln n}\left((1-x)\ln(1+1/n) + o_{x\to 1}(x-1)\right)
\end{aligned}$$

d'où

$$\frac{1}{1-x}\left(\frac{1}{n^{x-1}} - \frac{1}{(n+1)^{x-1}}\right) = e^{(1-x)\ln n}\left(\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) + o_{x\to 1}(1)\right) \xrightarrow[x\to 1]{} \ln(n+1) - \ln(n).$$

Par suite, $v_n(x) \xrightarrow[x\to 1]{} \frac{1}{n} + \ln(n+1) - \ln n = v_n(1)$. Donc v_n est continue en 1.

On en déduit que la série $\sum_{n\geq 1} v_n$ est une série de fonctions continues sur $[1,2]$. La convergence uniforme sur $[1,2]$ entraîne donc la continuité de sa somme sur $[1,2]$.

ii. On en déduit que

$$\zeta(x) - \frac{1}{x-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n(x) = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} v_n(1)\right) + o(1) = \gamma + o(1)$$

au voisinage de 1^+. D'où $\zeta(x) = \frac{1}{x-1} + \gamma + o(1)$ au voisinage de 1^+.

8. *Application*

D'après le développement asymptotique obtenu à la question 6b de ζ, on obtient d'une part

$$\zeta(x) - \frac{1}{x-1} = \left(\frac{F'(1)}{\ln 2} + \frac{\ln 2}{2}\right) + o_{x\to 1^+}(1),$$

et d'autre part grâce à la question précédente,

$$\zeta(x) - \frac{1}{x-1} = \gamma + o_{x\to 1^+}(1).$$

Par unicité de la partie principale du développement limité, on en déduit que

$$\frac{F'(1)}{\ln 2} + \frac{\ln 2}{2} = \gamma \quad \text{d'où} \quad F'(1) = \ln 2\left(\gamma - \frac{\ln 2}{2}\right).$$

D'après la question 4(b)ii, on trouve finalement

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}\ln n}{n} = -F'(1) = \ln 2\left(\frac{\ln 2}{2} - \gamma\right).$$