Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre d'automne 2012-2013

Math III - PMI Durée : 1 heure et 30 minutes

Partie CCP - Devoir numéro 2

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.
Dans toutes les questions, il sera tenu le plus grand compte de la rigueur de la rédaction ; ***toute réponse insuffisamment justifiée sera considérée comme nulle****.*

On rappelle que le nombre $e \approx 2,72$, $\dfrac{1}{\sqrt{e}} \approx 0,61$, $\sqrt{2} \approx 1,41$ et $\ln(3) \approx 1,10$.

Partie I - Étude d'une fonction

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 3xe^{-x^2} - 1$.

1. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$, ainsi que les limites aux bornes du domaine de définition. Donner le tableau de variations de f. Préciser les branches infinies de la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f.
2. Calculer $f''(x)$.
3. Donner l'équation de la tangente en 0. Étudier la position de la courbe $\mathcal{C}_f$ par rapport à la tangente au point d'abscisse 0. Que peut-on dire du point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse 0 ?
4. Donner l'allure de la courbe $\mathcal{C}_f$ de f.
5. (a) Expliquer pourquoi la fonction f admet des développements limités à n'importe quel ordre en 0.

   (b) Donner le développement limité de f au voisinage de 0 à l'ordre 5.

Partie II - Étude d'une équation différentielle

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit E_n l'équation différentielle $xy' - (n - 2x^2)y = n - 2x^2$. On note H_n l'équation homogène (aussi appelée équation sans second membre) associée à E_n.

6. Résoudre H_n sur $]0; +\infty[$ et sur $] - \infty; 0[$.
7. En déduire les solutions de E_n sur $]0; +\infty[$ et sur $] - \infty; 0[$.
8. Donner toutes les fonctions f définies, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et solutions de E_n sur $\mathbb{R}$.
   On distinguera les cas $n = 1$ et $n \geq 2$.

Partie III - Étude de deux suites

On suppose désormais dans toute la suite du problème que l'entier n est supérieur ou égal à 2.
Soit $f_n(x) = 3x^n e^{-x^2} - 1$.

9. Quel est le signe de $f_n(0)$? de $f_n(1)$?
10. Étudier les variations de f_n sur l'intervalle $[0; +\infty[$. Donner la limite de $f_n(x)$ quand x tend vers $+\infty$. En déduire que f_n s'annule sur $[0; +\infty[$ en deux réels, notés u_n et v_n, qui vérifient $u_n < 1 < v_n$.
11. Montrer que la suite $(v_n)_{n\geq 2}$ admet une limite que l'on explicitera.
12. (a) Exprimer $e^{-u_n^2}$ en fonction de u_n^n.
    (b) En déduire le signe de $f_{n+1}(u_n)$.
    (c) Déduire de ce qui précède la monotonie de la suite $(u_n)_{n\geq 2}$.
    (d) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ est convergente. On note l sa limite.
13. Soit g_n définie sur $]0; +\infty[$ par : $\forall x > 0$, $g_n(x) = \ln(3) + n\ln(x) - x^2$.
    (a) Soit $t > 0$. Montrer que $g_n(t) = 0$ si et seulement si $f_n(t) = 0$.
    (b) On suppose que $l \neq 1$. Trouver une contradiction en utilisant ce qui précède. Que peut-on en conclure ?
    (c) Soit la suite $(w_n)_{n\geq 2}$ définie par : $\forall n \geq 2$, $w_n = u_n - 1$. En utilisant un développement limité de $g_n(1 + w_n)$, trouver un équivalent simple de w_n.

Partie IV - Étude d'une courbe paramétrée (BONUS)

Soit $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé. Soit M la courbe paramétrée définie sur $]0; +\infty[$ telle que pour tout $t > 0$, le point $M(t)$ ait pour coordonnées dans le repère $\mathcal{R}$, $(x(t), y(t))$, définies par

$$\begin{cases} x(t) = g_2(t) = \ln(3) + 2\ln(t) - t^2 \\ y(t) = t - \dfrac{1}{3}t^3 \end{cases}$$

14. (a) Étudier les variations de x et y ainsi que leurs limites aux bornes du domaine de définition.
    (b) Étudier les branches infinies de la courbe M.
    (c) Étudier la nature du point $M(1)$. Donner un vecteur directeur de la tangente en $M(1)$ à la courbe.
15. Tracer l'allure de la courbe M.

Correction du Devoir Surveillé 2 - partie CCP