Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre d'automne 2016-2017

Math III - Cursus préparatoire 2A Durée : 1 heure et 30 minutes

---

Partie commune - Devoir numéro 2

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Dans toutes les questions, il sera tenu le plus grand compte de la rigueur de la rédaction ; ***toute réponse insuffisamment justifiée sera considérée comme nulle****.*
Tous les exercices sont indépendants.

Exercice 1. Déterminer la nature des séries de terme général suivant :
1. $u_n = \dfrac{\operatorname{ch}(2n)}{\operatorname{ch}(n)}$, 2. $v_n = \sqrt[3]{n^3 + an} - \sqrt{n^2+3}$ où a est un paramètre réel.

Exercice 2. Étudier la nature de la série suivante et calculer sa somme en cas de convergence :

$$\sum_{k\in\mathbb{N}^*} \ln\left(1 + \frac{2}{k(k+3)}\right).$$

Exercice 3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$. On note $\displaystyle\sum_{n\geq 2} c_n$ la série produit de Cauchy de la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ par elle-même.

1. Pour $n \geq 2$, donner l'expression du terme général c_n.
2. Soit $n \geq 2$. En décomposant en éléments simples la fraction rationnelle $\dfrac{1}{X(n-X)}$, montrer l'égalité suivante : $|c_n| = \dfrac{2}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}$.
3. À l'aide d'un encadrement série-intégrale, déterminer un équivalent simple de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}$ lorsque $n \to +\infty$. En déduire la limite de $|c_n|$ lorsque $n \to +\infty$.
4. Montrer que la suite $(|c_n|)_{n\geq 2}$ est monotone et préciser son sens de monotonie.
5. Conclure sur la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} c_n$.

Exercice 4. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. Pour $n \in \mathbb{N}$ supérieur ou égal à 2, on note $M_n = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & \alpha \\ \alpha & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Calculer les déterminants de M_2 et M_3.
2. Pour $n \geq 2$, calculer le déterminant de M_n.
3. Discuter le rang de M selon les valeurs de α.

Exercice 5. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A = (a_{i,j})_{i,j \in [\![1;2n]\!]} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique et J la matrice de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.

1. On note $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par : $\varphi(x) = \det(A + xJ)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer que la fonction φ est paire.
2. Montrer qu'il existe deux réels a, b tels que $\varphi(x) = ax + b$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\det(A + xJ) = \det(A)$.

Correction du Devoir Surveillé 2 - partie commune

Correction de l'exercice 1

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{e^{2n} + e^{-2n}}{e^n + e^{-n}} \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{e^{2n}}{e^n} = e^n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Par suite, la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.

2. On effectue un développement limité afin d'étudier la série $\sum v_n$ en mettant en facteur les termes dominants :

$$\begin{aligned} v_n &= \left(n^3 + an\right)^{1/3} - (n^2+3)^{1/2} \\ &= (n^3)^{1/3}\left(1 + \frac{a}{n^2}\right)^{1/3} - \sqrt{n^2}\left(1 + \frac{3}{n^2}\right)^{1/2} \\ &= n\left(1 + \frac{a}{3n^2} - \frac{a^2}{9n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)\right) - n\left(1 + \frac{3}{2n^2} - \frac{9}{8n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)\right) \\ &= \left(\frac{a}{3} - \frac{3}{2}\right)\frac{1}{n} + w_n \end{aligned}$$

avec $w_n = \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ lorsque $n \to +\infty$. Par comparaison avec une série à termes positifs, la série $\sum w_n$ converge. Ainsi, la série $\sum v_n$ est de même nature que la série de terme général $\left(\dfrac{a}{3} - \dfrac{3}{2}\right)\dfrac{1}{n}$ qui converge si et seulement si $\dfrac{a}{3} - \dfrac{3}{2} = 0$ c'est-à-dire $a = \dfrac{9}{2}$.

Correction de l'exercice 2 Puisque l'on nous demande de calculer la somme en cas de convergence, il y a de grandes chances que la série soit téléscopique. Soit $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{2}{k(k+3)}\right) &= \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k^2+3k+2}{k(k+3)}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{(k+1)(k+2)}{k(k+3)}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left(\ln(k+1) + \ln(k+2) - \ln(k) - \ln(k+3)\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} (v_k - v_{k+1}) \text{ où l'on a posé } v_k = \ln(k+2) - \ln(k) \\ &= v_1 - v_{n+1} \\ &= \ln(3) - \ln(n+3) + \ln(n+1) \\ &= \ln(3) - \ln\left(1 + \frac{2}{n+1}\right) \\ &\underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ln(3) \end{aligned}$$

ce qui démontre que la série considérée converge et que sa somme vaut $\ln(3)$.

Correction de l'exercice 3

1. Par définition du produit de Cauchy, pour tout $n \geq 2$,

$$c_n = \sum_{k=1}^{n} u_k u_{n-k} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k}\frac{(-1)^{n-k}}{n-k} = (-1)^n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(n-k)}.$$

2. Soit $n \geq 2$. La décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle $F(X) = \dfrac{1}{X(n-X)}$ est de la forme $F(X) = \dfrac{a}{X} + \dfrac{b}{n-X}$. En évaluant $XF(X)$ en 0 (resp. $(n-X)F(X)$ en n), on trouve $a = \dfrac{1}{n}$ (resp. $b = \dfrac{1}{n}$) d'où $F(X) = \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1}{X} + \dfrac{1}{n-X}\right)$. Puisque pour tout $k \in [\![1; n-1]\!]$, $\dfrac{1}{k(n-k)} \geq 0$, on obtient ainsi

$$|c_n| = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(n-k)} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k}\right) = \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{n-k}\right) = \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}$$

en effectuant un changement d'indice dans la 2ème somme.

3. On considère la fonction $f :]0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{1}{x}$. La fonction f est continue, décroissante et à valeurs positives sur $]0; +\infty[$. Soit $k \in [\![1; n]\!]$, en exploitant la décroissance de f sur $[k; k+1]$, il vient

$$\int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leq f(k)$$

d'où en sommant cette inégalité pour k allant de 1 à $n-1$ ($n \geq 2$ fixé) et en utilisant la relation de Chasles :

$$\ln(n) = \int_1^n \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leq \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}.$$

De même, pour $k \in [\![2; n]\!]$, en exploitant la décroissance de f sur $[k-1; k]$, on trouve

$$f(k) \leq \int_{k-1}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{d'où} \quad \sum_{k=2}^{n-1} f(k) \leq \int_1^{n-1} f(t)\,\mathrm{d}t$$

et en rajoutant le terme pour $k = 1$:

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} \leq \ln(n-1) + 1.$$

On obtient donc

$$1 \leq \frac{\sum_{k=1}^{n-1} 1/k}{\ln(n)} \leq \frac{\ln(n-1)+1}{\ln(n)}$$

avec $\dfrac{\ln(n-1)+1}{\ln(n)} = \dfrac{\ln(n) + \ln(1-1/n) + 1}{\ln(n)} = 1 + \dfrac{\ln(1-1/n)+1}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. Par le théorème des gendarmes, on conclut que

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n).$$

On obtient ainsi $|c_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{2\ln(n)}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

4. Pour $n \geq 2$,

$$\begin{aligned} |c_{n+1}| - |c_n| &= \frac{2}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} \\ &= \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}\left(\frac{2}{n+1} - \frac{2}{n}\right) + \frac{2}{n(n+1)} \\ &= \frac{2}{n(n+1)}\left(1 - \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}\right) \leq 0 \end{aligned}$$

ce qui démontre la décroissance de la suite $(|c_n|)_{n\geq 2}$.

5. Puisque pour tout $n \geq 2$, $(-1)^n c_n \geq 0$, la série $\sum_{n\geq 2} c_n$ est une série aternée. De plus, la suite $(|c_n|)_{n\geq 2}$ est décroissante et converge vers 0 donc la série $\sum c_n$ converge par le critère des séries alternées.

Correction de l'exercice 4

1. On a $\det(M_2) = \begin{vmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{vmatrix} = 1 - \alpha^2$ puis en développant par rapport à la première colonne

$$\det(M_3) = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \\ \alpha & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \alpha \begin{vmatrix} \alpha & 0 \\ 1 & \alpha \end{vmatrix} = 1 + \alpha^3.$$

2. Comme dans le calcul du déterminant de M_3, on peut directement développer le déterminant par rapport à la première colonne ce qui donne

$$\det(M_n) = 1 \begin{vmatrix} 1 & \alpha & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \alpha \\ (0) & & & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{n+1}\alpha \begin{vmatrix} \alpha & & & (0) \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ (0) & & 1 & \alpha \end{vmatrix} = 1 + (-1)^{n+1}\alpha^n$$

puisque la première matrice est triangulaire supérieure et la seconde triangulaire inférieure.

3.
   - Si $\det(M_n) = 0$, ce qui équivaut à $(-\alpha)^n = 1$ encore équivalent à $\alpha \in \left\{-e^{2ik\pi/n} \mid k \in [\![0; n-1]\!]\right\}$, la matrice M_n n'est pas inversible donc son rang est inférieur ou égal à $n-1$. Or on peut remarquer que les $n-1$ dernières colonnes de M_n sont étagées donc forment une famille libre, ce qui entraîne $\mathrm{rang}(M_n) \geq n-1$. Finalement, le rang de M_n est $n-1$.
   - Si $\det(M_n) \neq 0$, alors M_n est inversible et $\mathrm{rang}(M_n) = n$.

Correction de l'exercice 5

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Puisque la matrice A est antisymétrique, J est symétrique, et le déterminant d'une matrice et sa transposée sont les mêmes, il vient

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \det(A + xJ) \\ &= \det({}^t(A + xJ)) \\ &= \det(-A + xJ) \quad \text{par linéarité de l'application } M \longmapsto {}^tM \\ &= \det(-(A - xJ)) \\ &= (-1)^{2n}\det(A - xJ) \text{ par multilinéarité du déterminant} \\ &= \det(A - xJ) \\ &= \varphi(-x). \end{aligned}$$

La fonction φ est donc paire.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$, en effectuant les opérations $L_i \leftarrow L_i - L_1$ pour $i \in [\![2; 2n]\!]$, on obtient

$$\varphi(x) = \begin{vmatrix} a_{1,1}+x & \dots & \dots & a_{1,2n}+x \\ a_{2,1}+x & & & a_{2,2n}+x \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{2n,1}+x & \dots & \dots & a_{2n,2n}+x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1,1}+x & \dots & \dots & a_{1,2n}+x \\ a_{2,1}-a_{1,1} & & & a_{2,2n}-a_{1,2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{2n,1}-a_{1,1} & \dots & \dots & a_{2n,2n}-a_{1,2n} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{2n} (-1)^{1+j}(a_{1,j}+x)\Delta_{1,j}$$

où $\Delta_{1,j}$ est le déterminant de la matrice obtenue à partir de la dernière matrice en supprimant la ligne 1 et la colonne j. Celle-ci n'ayant que des coefficients réels ne dépendant pas de x, le terme $\Delta_{1,j}$ est un réel indépendant de x. Ainsi,

$$\varphi(x) = ax + b \qquad \text{avec } a = \sum_{j=1}^{2n} (-1)^{i,j} \Delta_{1,j} \text{ et } b = \sum_{j=1}^{2n} (-1)^{1+j} a_{1,j} \Delta_{1,j}$$

ce qui démontre l'existence des réels a et b cherchés.

3. Puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = ax + b = \varphi(-x) = -ax + b$, on trouve $2ax = 0$ pour tout x, ce qui entraîne (pour $x \neq 0$) $a = 0$. La fonction φ est donc constante égale à b, ce qui donne

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \det(A + xJ) = \varphi(x) = \varphi(0) = \det(A).$$