Université Claude Bernard - Lyon 1 — Semestre d'automne 2016-2017

Math III - Cursus préparatoire 2A — Durée : 1 heure et 30 minutes

---

Partie CCP - Devoir numéro 2

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Dans toutes les questions, il sera tenu le plus grand compte de la rigueur de la rédaction ; ***toute réponse insuffisamment justifiée sera considérée comme nulle.***

On étudie la convergence de la *série de Hardy* $\sum_{n\in\mathbb{N}^\star} \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^\alpha}$ ainsi que celle de l'intégrale $I_\alpha = \int_1^{+\infty} \frac{\sin\left(\pi\sqrt{t}\right)}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$, en fonction du paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$. Les quatre parties sont indépendantes et peuvent être traitées dans l'ordre souhaité.

Partie I : étude de convergence pour $\alpha > 1$

1. Étudier la convergence de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^\star} \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^\alpha}$ et de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin\left(\pi\sqrt{t}\right)}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ pour $\alpha > 1$.

Partie II : étude de convergence pour $\alpha \in \left]\frac{1}{2}; 1\right]$

Dans cette partie, on choisit $\alpha \in \left]\frac{1}{2}; 1\right]$.

2. (a) Montrer que l'intégrale $J_\alpha = \int_1^{+\infty} \frac{\cos(\pi t)}{t^{2\alpha}}\,\mathrm{d}t$ converge.

   (b) À l'aide d'une intégration par parties, étudier la convergence de l'intégrale $K_\alpha = \int_1^{+\infty} \frac{\sin(\pi t)}{t^{2\alpha-1}}\,\mathrm{d}t$ et exprimer K_α en fonction de J_α.

   (c) À l'aide d'un changement de variable, montrer que l'intégrale $I_\alpha = \int_1^{+\infty} \frac{\sin\left(\pi\sqrt{t}\right)}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ converge et calculer sa valeur en fonction de la valeur de J_α.

   (d) Montrer que $|I_\alpha| \leq \frac{4}{\pi}$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on note $v_n = \int_n^{n+1} \frac{\sin\left(\pi\sqrt{t}\right)}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$. Étudier la convergence de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^\star} v_n$.

4. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose $u_n = \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^\alpha}$ et on définit la fonction $\varphi : [1; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ par $\varphi(t) = \frac{\sin\left(\pi\sqrt{t}\right)}{t^\alpha}$.

   (a) Justifier pourquoi on ne peut pas utiliser le critère de comparaison série-intégrale pour montrer la convergence de la série de terme général u_n.

   (b) Justifier que la fonction φ est dérivable sur $[1; +\infty[$ et déterminer une constante $M \in \mathbb{R}$ telle que $|\varphi'(t)| \leq \frac{M}{t^{\alpha+1/2}}$ pour tout $t \in [1; +\infty[$.

   (c) i. Montrer que $u_n - v_n = \int_n^{n+1} (\varphi(n) - \varphi(t))\,\mathrm{d}t$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$.

   ii. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$:

$$|u_n - v_n| \leq \frac{M}{n^{\alpha+1/2}}.$$

   (d) Montrer que la série de terme général $u_n - v_n$ converge.

(e) En déduire la nature de la série de terme général $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^\star} \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^\alpha}$.

Partie III : étude de convergence pour $\alpha = \frac{1}{2}$

5. Montrer que la fonction $f : x \longmapsto \cos(\pi x^2)$ n'admet pas de limite lorsque x tend vers $+\infty$.
6. À l'aide d'un changement de variable, étudier la convergence de l'intégrale $I_{1/2} = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin\left(\pi\sqrt{t}\right)}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$.
7. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on note $w_n = \cos\left(\pi\sqrt{n+1}\right) - \cos(\pi\sqrt{n})$.
   (a) Étudier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} w_n$.
   (b) Montrer que w_n admet un développement asymptotique quand $n \to +\infty$, de la forme :
   $$w_n = a\frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{\sqrt{n}} + b\frac{\cos(\pi\sqrt{n})}{n} + \underset{n\to+\infty}{\mathcal{O}}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right) \qquad \text{avec } a, b \in \mathbb{R}.$$
   (c) On peut démontrer de manière analague à celle donnée dans la partie I que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\cos(\pi\sqrt{n})}{n}$ converge. Étudier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^\star} \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{\sqrt{n}}$.

Partie IV : estimation de la somme pour $\alpha = 3$

Dans cette partie, on chosisit $\alpha = 3$ et on cherche à donner une estimation de la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^3}$.

8. Dans cette question, on étudie le reste $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^3}$ de la série $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}^\star} \frac{1}{k^3}$.
   (a) Expliquer pourquoi le reste R_n est bien défini pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$.
   (b) Montrer pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$:
   $$\frac{1}{k^3} \geq \int_k^{k+1} \frac{1}{t^3}\,\mathrm{d}t \geq \frac{1}{(k+1)^3}.$$
   (c) En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$:
   $$R_n \geq \int_{n+1}^{+\infty} \frac{1}{t^3}\,\mathrm{d}t \geq R_{n+1}.$$
   (d) Trouver une valeur de n à partir de laquelle $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3}$ est une valeur approchée de la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^3}$ à 0.5×10^{-4} près.
   (e) Déterminer un équivalent de R_n en $+\infty$.
9. Donner, en justifiant, une valeur approchée de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^3}$ à 0.5×10^{-4} près.

Correction du Devoir Surveillé 2 - partie CCP

Partie I : étude de convergence pour $\alpha > 1$

Soit $\alpha > 1$.

1. • On étudie la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^\star} \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^\alpha}$. On a pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$:

$$\left|\frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^\alpha}\right| \quad \leq \quad \frac{1}{n^\alpha}$$

La série de Riemann $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^\star} \frac{1}{n^\alpha}$ converge puisque $\alpha > 1$. Par comparaison de séries à termes positifs, la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^\star} \left|\frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^\alpha}\right|$ converge. Autrement dit, la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^\star} \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^\alpha}$ converge absolument, ce qui implique qu'elle converge.

• On étudie la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(\pi\sqrt{t})}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$. La fonction $f : t \longmapsto \dfrac{\sin(\pi\sqrt{t})}{t^\alpha}$ est continue sur $[1;+\infty[$ et pour tout $t \in [1;+\infty[$:

$$\left|\frac{\sin(\pi\sqrt{t})}{t^\alpha}\right| \quad \leq \quad \frac{1}{t^\alpha}$$

Par comparaison de fonctions à valeurs positives, la fonction f est intégrable sur $[1;+\infty[$ donc l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(\pi\sqrt{t})}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ converge absolument, ce qui implique qu'elle converge.

Partie II : étude de convergence pour $\alpha \in \left]\frac{1}{2};1\right]$

2. (a) La fonction $g : t \longmapsto \dfrac{\cos(\pi t)}{t^{2\alpha}}$ est continue sur $[1;+\infty[$ et pour tout $t \in [1;+\infty[$:

$$\left|\frac{\cos(\pi t)}{t^{2\alpha}}\right| \quad \leq \quad \frac{1}{t^{2\alpha}}$$

avec $2\alpha > 1$. Par comparaison de fonctions à valeurs positives, la fonction g est intégrable sur $[1;+\infty[$ donc l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(\pi t)}{t^{2\alpha}}\,\mathrm{d}t$ converge absolument, ce qui implique qu'elle converge.

(b) Les fonctions $t \longmapsto -\dfrac{\cos(\pi t)}{\pi}$ et $t \longmapsto \dfrac{1}{t^{2\alpha-1}}$ sont de classe C^1 sur $]1;+\infty[$ et $\displaystyle\lim_{t\to 1} -\frac{\cos(\pi t)}{\pi t^{2\alpha-1}} = \frac{1}{\pi}$, $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} -\frac{\cos(\pi t)}{\pi t^{2\alpha-1}} = 0$. Comme l'intégrale J_α converge, le théorème d'intégration par parties pour les intégrales généralisées montre que l'intégrale K_α converge et on a :

$$\begin{aligned}
K_\alpha &= \int_1^{+\infty} \frac{\sin(\pi t)}{t^{2\alpha-1}}\,\mathrm{d}t \\
&= \left[-\frac{\cos(\pi t)}{\pi t^{2\alpha-1}}\right]_1^{+\infty} - \int_1^{+\infty} \frac{(2\alpha-1)\cos(\pi t)}{\pi t^{2\alpha}}\,\mathrm{d}t \\
&= -\frac{1}{\pi} - \frac{2\alpha-1}{\pi}\int_1^{+\infty} \frac{\cos(\pi t)}{t^{2\alpha}}\,\mathrm{d}t \\
&= -\frac{1}{\pi} - \frac{2\alpha-1}{\pi} J_\alpha
\end{aligned}$$

(c) On fait le changement de variable $u = \sqrt{t}$ (c'est-à-dire $t = u^2$ et donc $\mathrm{d}t = 2u\,\mathrm{d}u$). La fonction $t \longmapsto \sqrt{t}$ est une bijection strictement croissante de classe C^1 de $[1;+\infty[$ sur lui-même. Comme l'intégrale J_α

converge, le théorème de changement de variable montre que l'intégrale I_α converge et on a de plus :

$$\begin{aligned} I_\alpha &= \int_1^{+\infty} \frac{\sin\left(\pi\sqrt{t}\right)}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_1^{+\infty} \frac{\sin(\pi u)}{(u^2)^\alpha}(2u\,\mathrm{d}u) \\ &= 2\int_1^{+\infty} \frac{\sin(\pi u)}{u^{2\alpha-1}}\,\mathrm{d}u \\ &= 2K_\alpha \end{aligned}$$

(d) On a prouvé :

$$\begin{aligned} I_\alpha &= 2K_\alpha \\ &= -\frac{2}{\pi} - \frac{2(2\alpha-1)}{\pi} J_\alpha \end{aligned}$$

L'inégalité triangulaire entraîne :

$$|I_\alpha| \leq \frac{2}{\pi} + \frac{2(2\alpha-1)}{\pi}|J_\alpha|$$

Or puisque J_α est absolument convergente, l'inégalité triangulaire sur les intégrales donne :

$$\begin{aligned} |J_\alpha| &\leq \int_1^{+\infty} \left|\frac{\cos(\pi t)}{t^{2\alpha}}\right|\mathrm{d}t \\ &\leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{2\alpha}}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\alpha-1} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} |I_\alpha| &\leq \frac{2}{\pi} + \frac{2(2\alpha-1)}{\pi} J_\alpha \\ &\leq \frac{4}{\pi} \end{aligned}$$

3. Soit $N \in \mathbb{N}^\star$. On calcule la somme partielle de la série grâce à la relation de Chasles :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{N} v_n &= \sum_{n=1}^{N} \int_n^{n+1} \frac{\sin\left(\pi\sqrt{t}\right)}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_1^{N+1} \frac{\sin\left(\pi\sqrt{t}\right)}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Comme l'intégrale $I_\alpha = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin\left(\pi\sqrt{t}\right)}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ converge, on obtient :

$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} v_n = I_\alpha.$$

Cela montre que la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^\star} v_n$ converge.

4. (a) On sait que la fonction φ est continue sur $[1;+\infty[$ et que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$ converge. Mais la fonction φ n'est pas à valeurs positives et a priori pas décroissante sur $[1;+\infty[$, donc le théorème de comparaison série-intégrale ne s'applique pas.

(b) La fonction φ est dérivable sur $[1;+\infty[$ comme quotient de fonctions dérivables et pour tout $t \in [1;+\infty[$:

$$\begin{aligned}
\varphi'(t) &= \frac{\frac{\pi}{2\sqrt{t}}\cos\left(\pi\sqrt{t}\right)t^{\alpha} - \alpha\sin\left(\pi\sqrt{t}\right)t^{\alpha-1}}{t^{2\alpha}} \\
&= \frac{\pi\cos\left(\pi\sqrt{t}\right)t^{\alpha-1/2} - 2\alpha\sin\left(\pi\sqrt{t}\right)t^{\alpha-1}}{2t^{2\alpha}}
\end{aligned}$$

L'inégalité triangulaire donne :

$$\begin{aligned}
|\varphi'(t)| &\leq \frac{1}{2t^{2\alpha}}\left(\pi\left|\cos\left(\pi\sqrt{t}\right)\right|t^{\alpha-1/2} + 2\alpha\left|\sin\left(\pi\sqrt{t}\right)\right|t^{\alpha-1}\right) \\
&\leq \frac{1}{2t^{2\alpha}}\left(\pi t^{\alpha-1/2} + 2\alpha t^{\alpha-1/2}t^{-1/2}\right) \\
&= \frac{\pi + \frac{2\alpha}{\sqrt{t}}}{2t^{\alpha+1/2}} \\
&\leq \frac{\frac{\pi}{2}+\alpha}{t^{\alpha+1/2}}
\end{aligned}$$

(c) i. Pour $n \in \mathbb{N}^{\star}$:

$$\begin{aligned}
u_n - v_n &= \frac{\sin\left(\pi\sqrt{n}\right)}{n^{\alpha}} - \int_n^{n+1}\frac{\sin\left(\pi\sqrt{t}\right)}{t^{\alpha}}\,\mathrm{d}t \\
&= \varphi(n) - \int_n^{n+1}\varphi(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_n^{n+1}\left(\varphi(n)-\varphi(t)\right)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

ii. Soit $n \in \mathbb{N}^{\star}$. En appliquant l'inégalité triangulaire (pour les intégrales) sur le résultat de la question précédente, on obtient :

$$|u_n - v_n| \leq \int_n^{n+1}|\varphi(n)-\varphi(t)|\,\mathrm{d}t$$

La fonction φ est dérivable sur $[n;n+1]$. Pour tout $t \in]n;n+1]$, le théorème des accroissements finis montre l'existence de $c \in]n;t[$ tel que :

$$\varphi(n)-\varphi(t) = \varphi'(c)(n-t)$$

Alors :

$$\begin{aligned}
|\varphi(n)-\varphi(t)| &\leq |\varphi'(c)|\,|n-t| \\
&\leq \left|\frac{\frac{\pi}{2}+\alpha}{c^{\alpha+1/2}}\right| \times 1 \\
&\leq \frac{\frac{\pi}{2}+\alpha}{n^{\alpha+1/2}}
\end{aligned}$$

Reportant, on obtient :

$$\begin{aligned}
|u_n - v_n| &\leq \int_n^{n+1}|\varphi(n)-\varphi(t)|\,\mathrm{d}t \\
&\leq \int_n^{n+1}\frac{\frac{\pi}{2}+\alpha}{n^{\alpha+1/2}}\,\mathrm{d}t \\
&\leq \frac{\frac{\pi}{2}+\alpha}{n^{\alpha+1/2}}
\end{aligned}$$

(d) Comme $\alpha + \dfrac{1}{2} > 1$, la série de Riemann $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^{\star}}\frac{\frac{\pi}{2}+\alpha}{n^{\alpha+1/2}}$ converge. Par comparaison de séries à termes positifs, la série de terme général $|u_n - v_n|$ converge. Autrement dit, la série de terme général $u_n - v_n$ converge absolument, ce qui implique qu'elle converge.

(e) On peut écrire $u_n = (u_n - v_n) + v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Or la série de terme général $u_n - v_n$ converge et la série de terme général v_n converge, donc la série de terme général u_n converge (l'ensemble des séries réelles convergentes est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel).

Partie III : étude de convergence pour $\alpha = \dfrac{1}{2}$

5. Considérons la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_n = \sqrt{2n}$. La suite $(x_n)_n$ tend vers $+\infty$ lorsque $n \to +\infty$ et vérifie $f(x_n) = \cos(2\pi n) = 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. De même, considérons la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $y_n = \sqrt{\dfrac{1}{2} + 2n}$. La suite $(y_n)_n$ tend elle-aussi vers $+\infty$ lorsque $n \to +\infty$ et on a $f(y_n) = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Puisque l'on a trouvé deux suites de limite $+\infty$, dont les images par f admettent deux limites différentes en $+\infty$, la fonction f ne peut pas avoir de limite en $+\infty$ d'après la caractérisation séquentielle de la limite.
6. La fonction $t \longmapsto \dfrac{\sin\left(\pi\sqrt{t}\right)}{\sqrt{t}}$ est continue sur $[1;+\infty[$. On fait le changement de variable $u = \sqrt{t}$ (c'est-à-dire $t = u^2$ et donc $\mathrm{d}t = 2u\,\mathrm{d}u$). La fonction $t \longmapsto \sqrt{t}$ est de classe C^1 de $[1;+\infty[$ sur lui-même. Pour $X \geq 1$, on a :

$$\begin{aligned}
\int_1^X \frac{\sin\left(\pi\sqrt{t}\right)}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t &= \int_1^{X^2} \frac{\sin(\pi u)}{u}(2u\,\mathrm{d}u) \\
&= \int_1^{X^2} 2\sin(\pi u)\,\mathrm{d}u \\
&= \left[-2\frac{\cos(\pi u)}{\pi}\right]_1^{X^2} \\
&= -2\frac{\cos\left(\pi X^2\right)}{\pi} - \frac{2}{\pi}
\end{aligned}$$

Comme l'expression $\cos\left(\pi X^2\right)$ n'a pas de limite quand $X \to +\infty$, l'intégrale $I_{1/2} = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin\left(\pi\sqrt{t}\right)}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ diverge.
7. (a) La série $\sum w_n$ est une série téléscopique. Pour $N \in \mathbb{N}$, on peut donc calculer la somme partielle :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N} w_n &= \sum_{n=0}^{N} \cos\left(\pi\sqrt{n+1}\right) - \cos\left(\pi\sqrt{n}\right) \\
&= \cos\left(\pi\sqrt{N+1}\right) - 1
\end{aligned}$$

Comme l'expression $\cos\left(\pi\sqrt{N+1}\right)$ n'admet pas de limite quand $N \to +\infty$, la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} w_n$ diverge.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned}
w_n &= \cos(\pi\sqrt{n+1}) - \cos(\pi\sqrt{n}) \\
&= \cos(\pi\sqrt{n}\sqrt{1+1/n}) - \cos(\pi\sqrt{n}) \\
&= \cos\left(\pi\sqrt{n}\left(1 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right) - \cos(\pi\sqrt{n}) \quad \text{car } \frac{1}{n} \to 0 \text{ quand } n \to +\infty \\
&= \cos\left(\pi\sqrt{n} + \frac{\pi}{2\sqrt{n}} - \frac{\pi}{8n^{3/2}} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)\right) - \cos(\pi\sqrt{n}) \\
&= \cos(\pi\sqrt{n})\cos\left(\frac{\pi}{2\sqrt{n}} - \frac{\pi}{8n^{3/2}} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)\right) - \sin(\pi\sqrt{n})\sin\left(\frac{\pi}{2\sqrt{n}} - \frac{\pi}{8n^{3/2}} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)\right) \\
&\quad - \cos(\pi\sqrt{n}) \\
&= \cos(\pi\sqrt{n})\left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2\sqrt{n}} - \frac{\pi}{8n^{3/2}}\right)^2 + \frac{1}{24}\left(\frac{\pi}{2\sqrt{n}} - \frac{\pi}{8n^{3/2}}\right)^3 + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)\right) \\
&\quad - \sin(\pi\sqrt{n})\left(\frac{\pi}{2\sqrt{n}} - \frac{\pi}{8n^{3/2}} - \frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{2\sqrt{n}} - \frac{\pi}{8n^{3/2}}\right)^3 + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)\right) \\
&= \frac{\pi^2}{8}\frac{\cos(\pi\sqrt{n})}{n} - \frac{\pi}{2}\frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n\sqrt{n}}\left(\frac{\pi^3}{192}\cos(\pi\sqrt{n}) + \left(\frac{\pi}{8} + \frac{\pi^3}{48}\right)\sin(\pi\sqrt{n})\right) + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right) \\
&= -\frac{\pi}{2}\frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{\sqrt{n}} + \frac{\pi^2}{8}\frac{\cos(\pi\sqrt{n})}{n} + \underset{n\to+\infty}{\mathcal{O}}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)
\end{aligned}$$

On aurait aussi très bien pu rédiger le développement asymptotique avec des $\mathcal{O}$ dès le départ (ce qui simplifie les calculs) :

$$\begin{aligned}
w_n &= \cos\left(\pi\sqrt{n}\left(1 + \frac{1}{2n} + \underset{n\to+\infty}{\mathcal{O}}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right) - \cos(\pi\sqrt{n}) \\
&= \cos(\pi\sqrt{n})\cos\left(\frac{\pi}{2\sqrt{n}} + \underset{n\to+\infty}{\mathcal{O}}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)\right) - \sin(\pi\sqrt{n})\sin\left(\frac{\pi}{2\sqrt{n}} + \underset{n\to+\infty}{\mathcal{O}}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)\right) - \cos(\pi\sqrt{n}) \\
&= \cos(\pi\sqrt{n})\left(1 - \frac{1}{2}\frac{\pi^2}{4n} + \underset{n\to+\infty}{\mathcal{O}}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)\right) - \sin(\pi\sqrt{n})\left(\frac{\pi}{2\sqrt{n}} + \underset{n\to+\infty}{\mathcal{O}}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)\right) \\
&= -\frac{\pi}{2}\frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{\sqrt{n}} + \frac{\pi^2}{8}\frac{\cos(\pi\sqrt{n})}{n} + \underset{n\to+\infty}{\mathcal{O}}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)
\end{aligned}$$

(c) Pour n assez grand :

$$\frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{\sqrt{n}} = -\frac{2}{\pi}\left(w_n - \frac{\pi^2}{8}\frac{\cos(\pi\sqrt{n})}{n} - c_n\right) \qquad \text{avec } c_n = \underset{n\to+\infty}{\mathcal{O}}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

On a admis que la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\cos(\pi\sqrt{n})}{n}$ converge. On a prouvé que la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} w_n$ diverge. Enfin, la série de terme général c_n converge absolument par comparaison de séries à termes positifs. Donc la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^\star} \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{\sqrt{n}}$ diverge.

Partie IV : estimation de la somme pour $\alpha = 3$

8. (a) Comme la série de terme général $\dfrac{1}{n^3}$ converge, son reste R_n d'ordre n est bien défini pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$.

(b) Soit $k \in \mathbb{N}^\star$. La fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{t^3}$ est décroissante sur $[k; k+1]$, donc :

$$\frac{1}{k^3} \geq \frac{1}{t^3}\,\mathrm{d}t \geq \frac{1}{(k+1)^3}.$$

Intégrant cet encadrement sur $[k; k+1]$, on obtient :

$$\frac{1}{k^3} \geq \int_k^{k+1} \frac{1}{t^3}\,\mathrm{d}t \geq \frac{1}{(k+1)^3}.$$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On somme l'encadrement pour k variant entre $n+1$ et $N \geq 2$ fixé grâce à la relation de Chasles :

$$\sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^3} \geq \int_{n+1}^{N+1} \frac{1}{t^3}\,\mathrm{d}t \geq \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{(k+1)^3}.$$

Faisant un décalage d'indice dans la dernière somme, on obtient :

$$\sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^3} \geq \int_{n+1}^{N+1} \frac{1}{t^3}\,\mathrm{d}t \geq \sum_{k=n+2}^{N+1} \frac{1}{k^3}.$$

Comme R_n est bien défini, on a :

$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^3} = R_n,$$

$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{k=n+2}^{N+1} \frac{1}{k^3} = R_{n+1}.$$

Enfin :

$$\lim_{N\to+\infty} \int_{n+1}^{N+1} \frac{1}{t^3}\,\mathrm{d}t = \int_{n+1}^{+\infty} \frac{1}{t^3}\,\mathrm{d}t.$$

Passant à la limite dans l'encadrement précédent, on obtient :

$$R_n \geq \int_{n+1}^{+\infty} \frac{1}{t^3}\,\mathrm{d}t \geq R_{n+1}.$$

(d) La somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3}$ est une valeur approchée de la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^3}$ à 0.5×10^{-4} près si et et seulement si $|R_n| \leq 0.5 \times 10^{-4}$ ce qui équivaut à $R_n \leq 0.5 \times 10^{-4}$ puisque $R_n \geq 0$. Or on a pour tout $n \geq 2$:

$$R_n \leq \int_{n}^{+\infty} \frac{1}{t^3}\,\mathrm{d}t.$$

Ainsi il suffit que l'on ait $\displaystyle\int_{n}^{+\infty} \frac{1}{t^3}\,\mathrm{d}t \leq 0.5 \times 10^{-4}$. Or :

$$\int_{n}^{+\infty} \frac{1}{t^3}\,\mathrm{d}t \quad = \quad \frac{1}{2n^2}$$

Ainsi on résout $\dfrac{1}{2n^2} \leq 0.5 \times 10^{-4}$, ce qui est équivalent à $n^2 \geq 10^4$, soit $n \geq 100$. Ainsi $\displaystyle\sum_{k=1}^{100} \frac{1}{k^3}$ est une valeur approchée de la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^3}$ à 0.5×10^{-4} près.

(e) On a l'encadrement pour tout $n \geq 2$:

$$\int_{n+1}^{+\infty} \frac{1}{t^3}\,\mathrm{d}t \leq R_n \leq \int_{n}^{+\infty} \frac{1}{t^3}\,\mathrm{d}t.$$

Autrement dit, pour tout $n \geq 2$:

$$\frac{1}{2(n+1)^2} \leq R_n \leq \frac{1}{2n^2}.$$

Le théorème des gendarmes permet de montrer l'équivalent :

$$R_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}.$$

9. Puisque toutes les séries écrites convergent :

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^3} - \sum_{n=1}^{100} \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^3}\right| &= \left|\sum_{n=101}^{+\infty} \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^3}\right| \\
&\leq \sum_{n=101}^{+\infty} \left|\frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^3}\right| \\
&\leq \sum_{n=101}^{+\infty} \frac{1}{n^3} \\
&= R_{100} \\
&\leq 0.5 \times 10^{-4}
\end{aligned}$$

On a prouvé que $\displaystyle\sum_{n=1}^{100} \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^3}$ est une valeur approchée de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^3}$ à 0.5×10^{-4} près.