Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2019-2020

Math IV - Cursus préparatoire 2A Durée : 1 heure et 30 minutes

---

Partie commune - Devoir numéro 2

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Dans toutes les questions, il sera tenu le plus grand compte de la rigueur de la rédaction ; ***toute réponse insuffisamment justifiée sera considérée comme nulle****.*

Tous les exercices sont indépendants.

Partie ANALYSE

Exercice 1. Déterminer le rayon de convergence des séries entières (complexes) suivantes :

1. $\sum_{n\in\mathbb{N}} 7^{\sqrt{n}} z^n$,
2. $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(1+i)^n}{n2^n} z^{3n}$,

Exercice 2. On s'intéresse dans cet exercice à la série entière d'une variable réelle $\sum_{n\geq 2} \frac{n}{n^2-1} x^n$.

1. Déterminer le rayon de convergence, noté R, de cette série entière et expliciter l'intervalle de convergence de cette série entière.
2. Calculer explicitement sa fonction somme, notée S, sur $]-R;R[$.
3. Montrer que cette série entière converge uniformément sur $[-R;0]$.
4. Déduire des questions précédentes la valeur de $S(-R)$.

Exercice 3. On munit $\mathbb{R}^5$ du produit scalaire usuel et on note $F = \{(x_1, \ldots, x_5) \in \mathbb{R}^5 \mid x_1+x_2-x_3-x_4-x_5 = 0\}$.

1. Expliciter le projeté orthogonal, noté $p_F(X)$, du vecteur $X = (0, 0, 1, 0, 2)$ sur le sous-espace vectoriel F.
2. Déterminer $I = \inf\{x_1^2 + x_2^2 + (1 - x_3)^2 + x_4^2 + (2 - x_5)^2 \mid (x_1, \ldots, x_5) \in F\}$.

Exercice 4. Soient E un espace euclidien de dimension $n \geq 3$ et a, b deux vecteurs unitaires de E. On note $\langle\ ,\ \rangle$ le produit scalaire sur E et on considère l'endomorphisme u de E défini par :

$$\forall x \in E, \quad u(x) = x - 2\langle a, x\rangle a - 2\langle b, x\rangle b.$$

1. Montrer que u est symétrique. L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?
2. Pour $x \in E$, développer $\|u(x)\|^2$.
3. On suppose désormais que a et b sont orthogonaux.
   (a) Montrer que u est un endomorphisme orthogonal.
   (b) Calculer $u(a)$ ainsi que $u(x)$ pour $x \in (\mathrm{Vect}(a, b))^{\perp}$.
   (c) En déduire qu'il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de u est de la forme
   $$\begin{pmatrix} -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
   et expliciter la nature géométrique de u (en donnant ses caractéristiques).
4. On suppose que a et b ne sont pas orthogonaux. Montrer que u n'est pas un endomorphisme orthogonal.

Correction du Devoir Surveillé 2 - partie commune

Correction de l'exercice 1

1. Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = 7^{\sqrt{n}}$, alors
$$|a_n|^{\frac{1}{n}} = 7^{\frac{\sqrt{n}}{n}} = e^{\frac{\ln(7)}{\sqrt{n}}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^0 = 1$$
Par la règle de Cauchy, le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ est $R_1 = \dfrac{1}{1} = 1$.

2. Il s'agit d'une série entière lacunaire. Notons R_2 son rayon de convergence. Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n(z) = \left|\dfrac{(1+i)^n}{n2^n} z^{3n}\right|$, alors $u_n(z) > 0$. De plus,
$$\frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)} = \frac{|1+i|^{n+1}\,|z|^{3n+3}}{(n+1)2^{n+1}}\,\frac{n2^n}{|1+i|^n\,|z|^{3n}} = |1+i|\,|z|^3\,\frac{n}{2(n+1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{|1+i|\,|z|^3}{2} = \frac{|z|^3}{\sqrt{2}}.$$
   - Si $\dfrac{|z|^3}{\sqrt{2}} < 1$, par la règle de D'Alembert, la série numérique $\sum u_n(z)$ converge, donc la série $\sum \dfrac{(1+i)^n}{n2^n} z^{3n}$ converge absolument, ce qui entraîne $|z| \leq R_2$. Or, par stricte croissance de la fonction $t \longmapsto t^3$ et $t \longmapsto t^{1/3}$ sur $\mathbb{R}^+$,
$$\frac{|z|^3}{\sqrt{2}} < 1 \iff |z|^3 < \sqrt{2} \iff |z| < \sqrt{2}^{1/3} \iff |z| < 2^{1/6}$$
   Ainsi, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$ vérifiant $|z| < 2^{1/6}$, on a $|z| \leq R_2$ ce qui implique $2^{1/6} \leq R_2$.
   - Si $\dfrac{|z|^3}{\sqrt{2}} > 1$, ce qui équivaut à $|z| > 2^{1/6}$, la série numérique $\sum u_n(z)$ diverge grossièrement, donc il en est de même de la série $\sum \dfrac{(1+i)^n}{n2^n} z^{3n}$. Par suite, $|z| \geq R_2$ ceci pour tout $z \in C$ vérifiant $|z| > 2^{1/6}$. On en déduit que $2^{1/6} \geq R_2$ d'où l'égalité $R_2 = 2^{1/6}$.

Correction de l'exercice 2

1. Posons, pour tout $n \geq 2$, $a_n = \dfrac{n}{n^2-1}$. Puisque $a_n \neq 0$ pour tout $n \geq 2$, on peut étudier
$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{n+1}{(n+1)^2-1}\,\frac{n^2-1}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^3}{n^3} = 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$
Par la règle de D'Alembert pour les séries entières, le rayon de convergence vaut $R = \dfrac{1}{1} = 1$. Par le cours, on sait que l'intervalle I de convergence vérifie $]-R;R[\subset I \subset [-R;R]$. Pour $x = 1$, on a $\sum a_n x^n = \sum \dfrac{1}{n}$ donc la série numérique $\sum a_n 1^n$ diverge par comparaison de séries à termes positifs. Pour $x = -1$, on a $(-1)^n a_n x^n = a_n \geq 0$ donc la série $\sum a_n(-1)^n$ est alternée. De plus, $|a_n(-1)^n| = a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Enfin,
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)(n^2-1)}{n((n+1)^2-1)} = \frac{n^3+n^2-n-1}{n^3+2n^2+n} = 1 - \frac{n^2+2n+1}{n^3+2n^2+n} \leq 1$$
donc la suite $(a_n)_n$ est décroissante. Par le critère des séries alternées, la série $\sum a_n(-1)^n$ converge. L'intervalle de convergence est donc $I = [-1;1[$.

2. La décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle $F(X) = \dfrac{X}{X^2-1} = \dfrac{X}{(X-1)(X+1)}$ est de la forme $F(X) = \dfrac{a}{X-1} + \dfrac{b}{X+1}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ (la partie entière étant nulle). En évaluant $(X-1)F(X)$ en 1, il vient $a = \dfrac{1}{2}$. En évaluant $(X+1)F(X)$ en -1, il vient $b = \dfrac{1}{2}$. Pour tout $x \in]-1;1[$, on a donc
$$S(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n+1}\right) x^n = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n-1} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n+1}\right)$$

puisque les deux séries ci-dessus convergent car les rayons de convergence de séries entières associées sont égaux à 1. Par changement d'indice, il vient alors

$$S(x) = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n} + \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n}\right) = \frac{1}{2}\left(x\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} + \frac{1}{x}\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{x^n}{n}\right)$$

pour $x \neq 0$. Par les développements en série entière usuels, on sait que, pour tout $u \in]-1;1[$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u^n}{n} = -\ln(1-u)$. On en déduit donc finalement que, pour tout $x \in]-1;1[$ non nul :

$$S(x) = \frac{1}{2}\left(-x\ln(1-x) + \frac{1}{x}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} - x - \frac{x^2}{2}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(-\ln(1-x)\left(x + \frac{1}{x}\right) - 1 - \frac{x}{2}\right)$$

Enfin, on a $S(0) = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n}{n^2-1} 0^n = 0$.

3. Soit $x \in [-R;0] = [-1;0]$, alors $(-1)^n \dfrac{n}{n^2-1} x^n = \dfrac{n}{n^2-1} |x|^n \geq 0$, donc la série numérique $\sum \dfrac{n}{n^2-1} x^n$ est alternée. De plus,

$$0 \leq \frac{n}{n^2-1} |x|^n \leq \frac{n}{n^2-1} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Enfin, puisque l'on a vu que la suite $\left(\dfrac{n}{n^2-1}\right)_{n\geq 2}$ est décroissante, et qu'il en est de même de la suite $(|x|^n)_{n\geq 2}$ puisque $|x| \leq 1$, par produit de suites positives et décroissantes, la suite $\left(\dfrac{n}{n^2-1}|x|^n\right)_{n\geq 2}$ est aussi décroissante. La série numérique $\sum \dfrac{n}{n^2-1} x^n$ vérifie donc le critère des séries alternées. Notons, pour $n \geq 2$ et $x \in [-1;0]$, $R_n(x) = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{k}{k^2-1} x^k$. Par le critère des séries alternées, pour tout $x \in [-1;0]$,

$$|R_n(x)| \leq \frac{n+1}{(n+1)^2-1} |x|^{n+1} \leq \frac{n+1}{n^2+2n}.$$

Cela démontre que la fonction R_n est bornée sur $[-1;0]$, et puisque la borne supérieure d'un ensemble est le plus petit des majorants de cet ensembe :

$$0 \leq \|R_n\|_{\infty;[-1;0]} = \sup_{x\in[-1;0]} |R_n(x)| \leq \frac{n+1}{n^2+2n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

La suite de fonctions $(R_n)_n$ des restes converge donc uniformément vers la fonction nulle sur $[-1;0]$. Ainsi, la série entière converge uniformément sur $[-1;0]$.

4. Posons, pour tout $n \geq 2$, $u_n : x \longmapsto \dfrac{n}{n^2-1} x^n$. Pour tout $n \geq 2$, la fonction u_n est continue sur $[-1;0]$. De plus, la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément sur $[-1;0]$. Sa fonction somme, qui correspond à S, est donc continue sur $[-1;0]$. En particulier,

$$S(-1) = \lim_{x\to -1^+} S(x) = \lim_{x\to -1^+} \frac{1}{2}\left(-\ln(1-x)\left(x+\frac{1}{x}\right) - 1 - \frac{x}{2}\right) = \ln(2) - \frac{1}{4}.$$

Correction de l'exercice 3

1. On peut écrire

$$F = \{Y = (x_1, \ldots, x_5) \in \mathbb{R}^5 \mid \langle Y, (1,1,-1,-1,-1)\rangle = 0\} = (\mathrm{Vect}\{(1,1,-1,-1,-1)\})^{\perp}.$$

Comme $\mathbb{R}^5$ est un espace euclidien, on en déduit que $F^\perp = \mathrm{Vect}\{(1,1,-1,-1,-1)\}$. Puisque $p_F(X) = X - p_{F^\perp}(X)$, et $\dim(F^\perp) = 1$, il est plus simple de déterminer $p_{F^\perp}(X)$. La famille $\{(1,1,-1,-1,-1)\}$ est une base de $F^\perp$ car génératrice et libre (puisque le vecteur est non nul). Comme elle est constituée d'un seul vecteur, c'est une base orthogonale de $F^\perp$. Par la formule de cours, on a donc :

$$p_{F^\perp}(X) = \frac{\langle (1,1,-1,-1,-1), X\rangle}{\langle (1,1,-1,-1,-1),(1,1,-1,-1,-1)\rangle}(1,1,-1,-1,-1) = -\frac{3}{5}(1,1,-1,-1,-1).$$

On en déduit que

$$p_F(X) = X - p_{F^\perp}(X) = (0,0,1,0,2) + \frac{3}{5}(1,1,-1,-1,-1) = \frac{1}{5}(3,3,2,-3,7).$$

2. On va transformer l'écriture de manière à faire apparaître une distance :

$$\begin{array}{rcl} I & = & \inf\left\{(0-x_1)^2 + (0-x_2)^2 + (1-x_3)^2 + (0-x_4)^2 + (2-x_5)^2 \mid (x_1,\ldots,x_5) \in F\right\} \\ & = & \inf\left\{\|(0,0,1,0,2) - (x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)\|^2 \mid (x_1,\ldots,x_5) \in F\right\} \\ & = & \inf\left\{\|(0,0,1,0,2) - (x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)\| \mid (x_1,\ldots,x_5) \in F\right\}^2 \quad \text{car les normes sont positives} \\ & = & d((0,0,1,0,2),F)^2 \\ & = & \|X - p_F(X)\|^2 \\ & = & \|p_{F^\perp}(X)\|^2 \\ & = & \dfrac{9}{5}. \end{array}$$

Correction de l'exercice 4

1. Soient $x, y \in E$. Comme $\langle a, x\rangle$ et $\langle b, x\rangle$ sont des réels, la linéarité à gauche du produit scalaire entraîne :

$$\langle u(x), y\rangle = \langle x - 2\langle a,x\rangle a - 2\langle b,x\rangle b, y\rangle = \langle x,y\rangle - 2\langle a,x\rangle\langle a,y\rangle - 2\langle b,x\rangle\langle b,y\rangle.$$

D'autre part, la linéarité à droite du produit scalaire implique

$$\begin{array}{rcl} \langle x, u(y)\rangle & = & \langle x, y - 2\langle a,y\rangle a - 2\langle b,y\rangle b\rangle \\ & = & \langle x,y\rangle - 2\langle a,y\rangle\langle x,a\rangle - 2\langle b,y\rangle\langle x,b\rangle \\ & = & \langle x,y\rangle - 2\langle a,x\rangle\langle a,y\rangle - 2\langle b,x\rangle\langle b,y\rangle \end{array}$$

par symétrie du produit scalaire. On a donc démontré que, pour tous $x, y \in E$, $\langle u(x), y\rangle = \langle x, u(y)\rangle$. Ainsi, l'endomorphisme u est symétrique. Par le théorème spectral, on en déduit que u est diagonalisable (dans une base orthonormée).

2. Soit $x \in E$, par définition de la norme associée à un produit scalaire, et propriétés de celui-ci, il vient :

$$\begin{array}{rcl} \|u(x)\|^2 & = & \langle u(x), u(x)\rangle \\ & = & \langle x - 2\langle a,x\rangle a - 2\langle b,x\rangle b, x - 2\langle a,x\rangle a - 2\langle b,x\rangle b\rangle \\ & = & \|x\|^2 + 4\langle a,x\rangle^2 \underbrace{\|a\|^2}_{=1^2} + 4\langle b,x\rangle^2 \underbrace{\|b\|^2}_{=1^2} - 4\langle a,x\rangle\langle x,a\rangle - 4\langle b,x\rangle\langle x,b\rangle + 8\langle a,x\rangle\langle b,x\rangle\langle a,b\rangle \\ & = & \|x\|^2 + 8\langle a,x\rangle\langle b,x\rangle\langle a,b\rangle \end{array}$$

3. (a) Puisque a et b sont orthogonaux, $\langle a,b\rangle = 0$. La question précédente entraîne alors que, pour tout $x \in E$, $\|u(x)\|^2 = \|x\|^2$ d'où $\|u(x)\| = \|x\|$ par positivité de la norme. L'endomorphisme u conserve la norme, c'est donc un endomorphisme orthogonal.

(b) On a $u(a) = a - 2\langle a, a\rangle a - 2\langle b, a\rangle b = a - 2\|a\|^2 a = -a$. Soit $x \in (\mathrm{Vect}(a,b))^{\perp}$, alors x est en particulier orthogonal à a et b, d'où $u(x) = x$.

(c) Comme ci-dessus, on remarque que $u(b) = b$. La famille (a, b) est une base orthonormée de $\mathrm{Vect}(a, b)$. Si on la complète avec une base orthonormée de $(\mathrm{Vect}(a,b))^{\perp}$, on obtient une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E adaptée à la décomposition $E = \mathrm{Vect}(a, b) \oplus (\mathrm{Vect}(a,b))^{\perp}$. Par les calculs effectués dans la question précédente, la matrice de u dans $\mathcal{B}$ est la matrice diagonale $\mathrm{diag}(-1, -1, 1, \ldots, 1)$. On en déduit que u est la symétrie orthogonale par rapport à $(\mathrm{Vect}(a,b))^{\perp}$.

Remarque : on aurait pu voir que puisque la famille (a, b) est orthonormée dans cette question, pour tout $x \in E$, $\langle a, x\rangle a + \langle b, x\rangle b = p_{\mathrm{Vect}(a,b)}(x)$ où $p_{\mathrm{Vect}(a,b)}$ désigne la projection orthogonale sur $\mathrm{Vect}(a, b)$. On en déduit que $u = \mathrm{Id}_E - 2p_{\mathrm{Vect}(a,b)}$, ce qui est l'expression de la symétrie orthogonale par rapport à $(\mathrm{Vect}(a,b))^{\perp}$ d'après le cours.

4. On a vu que, pour tout $x \in E$, $\|u(x)\|^2 = \|x\|^2 + 8\langle a, x\rangle\langle b, x\rangle\langle a, b\rangle$. En particulier, pour $x = a$, cela s'écrit $\|u(a)\|^2 = \|a\|^2 + 8\langle a, a\rangle\langle b, a\rangle\langle a, b\rangle = \|a\|^2 + 8\langle a, b\rangle^2$. Comme a et b ne sont pas orthogonaux, $\langle a, b\rangle^2 > 0$, donc $\|u(a)\|^2 > \|a\|^2$ et ainsi $\|u(a)\| \neq \|a\|$. Puisque u ne conserve pas la norme, ce n'est pas un endomorphisme orthogonal.