Numéro de la feuille d'examen
à reporter ci-dessous :
N°

Exercice 2

1. **φ est bilinéaire** : En effet, les opérations de dérivation

$$: \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{C}^1([0,1]) & \longrightarrow & \mathcal{C}^0([0,1]) \\ f & \longmapsto & f' \end{array} \right.$$

et d'intégration

$$: \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & \int^1 f(t)\,dt \end{array} \right.$$

sont notoirement linéaires, et l'opération de produit

$$: \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})^2 & \longrightarrow & \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R}) \\ (f,g) & \longmapsto & fg \end{array} \right.$$

est notoirement bilinéaire. [Il était tout à fait possible de montrer "à la main" que, pour tous f_1, f_2 et g de $\mathcal{C}^1([0,1])$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\varphi(f_1 + \lambda f_2, g) = \varphi(f_1, g) + \lambda\, \varphi(f_2, g)$$

et de renvoyer à la symétrie pour la linéarité à droite]

φ est symétrique trivialement, par symétrie de l'opération de produit ci-dessus. [Remarque analogue : il était possible de montrer que pour tous f et g de $\mathcal{C}^1([0,1])$,

$$\varphi(f, g) = \varphi(g, f).]$$

φ est définie-positive : soit $f \in E$; on a :
$\varphi(f, f) = \int_0^1 f'(t)^2\,dt \geq 0$ par croissance de l'intégrale, avec égalité ssi $f'(t) = 0$ pour tout $t \in [0;1]$ (la fonction f' étant continue puisque $f \in E$), ou, autrement dit, ssi f est constante sur $[0;1]$. Or, $f \in E$ donc $f(0) = 0$.
Finalement, $\boxed{\varphi(f, f) = 0 \text{ ssi } f = f(0) = 0}$:
φ est bien définie positive.

En conclusion, φ est bien un produit scalaire

2. Soient $f \in E$ et $t \in [0;1]$.

Par le théorème fondamental de l'analyse, on a

$$\boxed{f(t) = \int_0^t f'(u)\,du}$$

puisque $f(0)=0$.

Appliquons l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour le produit scalaire usuel sur $\mathcal{C}^0([0;t],\mathbb{R})$:

$$\left(\int_0^t f'(u)\,du\right)^2 \leq \left(\int_0^t du\right)\left(\int_0^t f'(u)^2\,du\right)$$

i.e. $(*)$ $\boxed{f(t)^2 \leq t\int_0^t f'(u)^2\,du}$

Il y a égalité dans $(*)$ ssi f' et 1 sont liées dans $\mathcal{C}^0([0;t],\mathbb{R})$, autrement dit ssi f' est constante sur $[0;t]$. Une fonction de dérivée constante étant affine, et $f(0)=0$, il y a donc égalité ssi f est linéaire sur $[0;t]$ (i.e. $\exists \lambda \in \mathbb{R} \,/\, \forall u \in [0;t],\ f(u) = \lambda u$).

3. Comme $(f')^2 \geq 0$, on a : $\forall t \in [0;1]$,

$$(1) \quad \int_0^t f'(u)^2\,du \leq \int_0^1 f'(u)^2\,du,$$

où l'on reconnait dans cette dernière forme $N(f)^2$.

Dès lors, pour tout $t \in [0;1]$, comme $t \geq 0$, $(*)$ donne :

$$(2) \quad f(t)^2 \leq t\,N(f)^2$$

Intégrons cette inégalité pour $t \in [0;1]$: par croissance de l'intégrale :

$$(3) \quad \int_0^1 f(t)^2\,dt \leq N(f)^2 \int_0^1 t\,dt$$

soit :

$$\|f\|^2 \leq \frac{1}{2}N(f)^2$$

d'où finalement (par croissance de la racine carrée sur

$$\boxed{\|f\| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}N(f)}$$

Remarquons que (1) est une égalité pour tout $t \in [0;1]$ ssi $f' = 0$ sur $[0;1]$, i.e. ssi f est constante sur $[0;1]$,

Numéro de la feuille d'examen
à reporter ci-dessous :
N°

égale à $f(0)=0$ (puisque $f\in E$). La fonction nulle donne aussi une égalité dans $(*)$, dans (2) et dans (3). Donc $\boxed{\|f\| = \frac{1}{\sqrt{2}} N(f) \text{ ssi } f=0}$.

4. Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

Remarquons d'abord que $f_n \in E$ en effet.

On a d'une part :

$$\|f_n\|^2 = \int_0^1 f_n(t)^2\,dt = \int_0^1 \frac{1}{n^2}\sin^2(n^2\pi t)\,dt$$

avec $0 \leq \sin^2 \leq 1$, donc par croissance de l'intégrale on a : $0 \leq \|f_n\|^2 \leq \frac{1}{n^2}$

ou encore $\boxed{0 \leq \|f_n\| \leq \frac{1}{n}}$ par croissance de la racine carrée sur $\mathbb{R}_+$

Par théorème des gendarmes, $\boxed{\|f_n\| \xrightarrow[n\infty]{} 0}$.

D'autre part, pour tout $x\in[0;1]$, on a $f_n'(x) = n\pi\cos(n^2\pi x)$, donc :

$$N(f_n)^2 = \int_0^1 f_n'(t)^2\,dt$$
$$= \int_0^1 (n\pi)^2\cos^2(n^2\pi t)\,dt$$
$$= (n\pi)^2\int_0^1 \frac{1}{2}[\cos(2\pi n^2 t)+1]\,dt$$
$$= \frac{n^2\pi^2}{2}\left(1 + \left[\frac{\sin(2\pi n^2 t)}{2\pi n^2}\right]_0^\pi\right)$$
$$= \frac{n^2\pi^2}{2}$$

donc

$$\boxed{N(f_n) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}n \xrightarrow[n\infty]{} +\infty}$$

5. Montrons que $\|.\|$ et N ne sont pas équivalentes.

Comme on a montré en question 3 que :

$$\exists c_2\in\mathbb{R}_+^* \,/\, \forall f\in E,\ \|f\| \leq c_2 N(f),$$

nous devons montrer que :

$$\forall c_1\in\mathbb{R}_+^*,\ \exists f\in E \,/\, N(f) > c_1\|f\|.$$

Soit donc $c_1\in\mathbb{R}_+^*$; par la question 4, comme $N(f_n)\xrightarrow[n\infty]{} +\infty$ et $\|f_n\| \xrightarrow[n\infty]{} 0$, on a $\frac{N(f_n)}{\|f_n\|} \xrightarrow[n\infty]{} +\infty$ (notons que le dénominateur n'est jamais nul comme $f_n\neq 0$) et donc $\exists n\in\mathbb{N}^* \,/\, \frac{N(f_n)}{\|f_n\|} > c_1$, i.e. $N(f_n) > c_1\|f_n\|$, comme cherché.

Ainsi, $\boxed{\|.\| \text{ et } N \text{ ne sont pas équivalentes}}$
[Il était également possible de raisonner par l'absurde, ou encore de noter que (f_n) convergeait dans $(E, \|.\|)$ vers 0, mais pas dans (E, N).].

On en déduit que E est de dimension infinie, par contraposée du théorème selon lequel toutes les normes sont équivalentes sur un espace vectoriel de dimension finie.

Exercice 3

1. φ est évidemment bilinéaire symétrique et positif par des arguments analogues à ceux de l'exercice 2, question. Reste à montrer le caractère défini : soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\varphi(P,P) = 0$, i.e. tel que $\int_0^\pi P(\cos\theta)^2 \, d\theta = 0$; alors, par continuité de $\theta \mapsto P(\cos\theta)^2$, $\forall \theta \in [0;\pi]$, $P(\cos\theta) = 0$, et P admet une infinité de racines : c'est donc que $P = 0$.

Donc φ est un produit scalaire

2. On procède par récurrence double. Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathcal{H}(n) : « \forall \theta \in \mathbb{R},\ T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta). »$$

Initialisation : Pour $n=0$, on a bien :

$$T_0(\cos\theta) = 1 = \cos(0 \cdot \theta)$$

et pour $n = 1$, on a également :

$$T_1(\cos\theta) = \cos(\theta) = \cos(1 \cdot \theta)$$

Donc $\mathcal{H}(0)$ et $\mathcal{H}(1)$ sont vraies

Hérédité : Supposons $\mathcal{H}(n-2)$ et $\mathcal{H}(n-1)$ vraies pour un certain $n \geq 2$, et montrons que $\mathcal{H}(n)$ est alors vraie.

Alors, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a :

$$
\begin{aligned}
T_n(\cos\theta) &= 2\cos(\theta)\,T_{n-1}(\cos\theta) - T_{n-2}(\cos\theta) && \text{par définition}\\
&= 2\cos(\theta)\cos((n-1)\theta) - \cos((n-2)\theta) && \text{par } \mathcal{H}(n-1)\\
&= \cos(n\theta) + \cancel{\cos((n-2)\theta)} - \cancel{\cos((n-2)\theta)} && \text{et } \mathcal{H}(n-2)\\
&= \cos(n\theta)
\end{aligned}
$$

Donc $\mathcal{H}(n)$ est vraie

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta).$$

3. Soient k et n deux entiers distincts. Il s'agit de montrer que $\varphi(T_k, T_n) = 0$; en effet :

$$
\begin{aligned}
\varphi(T_k, T_n) &= \int_0^\pi T_k(\cos\theta)\,T_n(\cos\theta)\,d\theta\\
&= \int_0^\pi \cos(k\theta)\cos(n\theta)\,d\theta && \text{par la question 2}\\
&= \frac{1}{2}\left[\int_0^\pi \cos((k+n)\theta)\,d\theta + \int_0^\pi \cos((k-n)\theta)\,d\theta\right]\\
&= \frac{1}{2}\left(\left[\frac{\sin((k+n)\theta)}{k+n}\right]_0^\pi + \left[\frac{\sin((k-n)\theta)}{k-n}\right]_0^\pi\right)\\
&= 0 && \text{avec } k+n \text{ et } k-n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}
\end{aligned}
$$

Donc $\forall (k,n) \in \mathbb{N}^2$, si $k \neq n$ alors $\varphi(T_k, T_n) = 0$:
la famille $\boxed{(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bien orthogonale}}$ pour φ.