
Correction du DS1 du 10 février 2026

Exercice 1. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, et l'application $\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(x, x') = ax_1x'_1 + x_2x'_2 + bx_1x'_3 + x_3x'_1 + x_3x'_3, \quad x = (x_1, x_2, x_3), \quad x' = (x'_1, x'_2, x'_3).$$

1. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur (a, b) pour que φ soit un produit scalaire.

Pour tous $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, l'application φ est bilinéaire.

Soit $x = (1, 0, 0)$ et $x' = (0, 0, 1) \in \mathbb{R}^3$. On observe que

$$\varphi(x, x') = b, \quad \varphi(x', x) = 1.$$

Donc une condition nécessaire pour la symétrie de φ est $b = 1$.

Réciproquement, si $b = 1$, alors

$$\varphi(x', x) = ax'_1x_1 + x'_2x_2 + x'_1x_3 + x'_3x_1 + x'_3x_3 = \varphi(x, x')$$

et donc φ est symétrique.

Pour tout $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, on calcule

$$\varphi(x, x) = ax_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_3 + x_3^2.$$

Le calcul suivant est classique et a été vu en TD :

$$2x_1x_3 + x_3^2 = (x_3 + x_1)^2 - x_1^2.$$

Donc

$$\varphi(x, x) = (a - 1)x_1^2 + x_2^2 + (x_3 + x_1)^2. \quad (1)$$

En considérant $x = (1, 0, 0)$, on voit qu'une condition nécessaire pour que φ soit positive est $a \geq 1$. Par (1), c'est aussi une condition suffisante.

Finalement, sous la condition $a \geq 1$, si $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ est tel que $\varphi(x, x) = 0$, alors dans (1), on voit une somme de termes positifs qui est nulle. Donc chacun des termes est nul, ce qui donne :

$$(a - 1 \text{ ou } x_1 = 0) \quad \text{et} \quad (x_2 = 0) \quad \text{et} \quad (x_1 + x_3 = 0). \quad (2)$$

Si $a = 1$, alors $\varphi(x, x) = 0$ avec $x = (1, 0, 0)$ et donc φ n'est pas définie positive. Si $a > 1$, alors si $\varphi(x, x) = 0$ par (2) on voit que $x = 0$.

Finalement : φ est définie positive si et seulement si $b = 1$ et $a > 1$.

-
2. Dans les cas où φ est un produit scalaire, donner une base de $(\text{vect}\{(0, 1, 1)\})^\perp$.
-

Soit $x = (x_1, x_2, x_3)$ dans l'orthogonal de $\text{vect}\{(0, 1, 1)\}$. On a donc

$$\varphi(x, (0, 1, 1)) = x_2 + x_1 + x_3 = 0.$$

L'équation $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ est une équation de plan (le plan orthogonal au vecteur $(0, 1, 1)$ au sens de φ) dans $\mathbb{R}^3$. Le vecteur $e_1 = (1, -1, 0)$ appartient à ce plan. Le vecteur $e_2 = (1, 0, -1)$ appartient aussi à ce plan et n'est pas colinéaire à e_1 . La famille (e_1, e_2) est libre dans le plan $(\text{vect}\{(0, 1, 1)\})^\perp$, c'est donc une base de ce plan.

Exercice 2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Rappeler la définition du produit scalaire hermitien usuel dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Le produit scalaire hermitien usuel dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est

$$(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \operatorname{tr}({}^t \bar{A} B). \quad (3)$$

2. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer l'inégalité

$$|\operatorname{tr}(A)| \leq n^{1/2} \left(\sum_{1 \leq i,j \leq n} |a_{i,j}|^2 \right)^{1/2}, \quad (4)$$

et étudier le cas d'égalité.

On observe que

$$\operatorname{tr}({}^t \bar{A}) = (A, \operatorname{Id}),$$

où $(\cdot, \cdot)$ est le produit scalaire hermitien (3) et Id est la matrice identité de taille n . Par Cauchy-Schwartz,

$$|(A, \operatorname{Id})| \leq \|A\| \|\operatorname{Id}\|.$$

On calcule

$$\|A\|^2 = (A, A) = \operatorname{tr}({}^t \bar{A} A) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} |a_{i,j}|^2.$$

Par ailleurs,

$$\|\operatorname{Id}\|^2 = \operatorname{tr}(\operatorname{Id}) = n,$$

d'où

$$|\operatorname{tr}({}^t \bar{A})| \leq n^{1/2} \left(\sum_{1 \leq i,j \leq n} |a_{i,j}|^2 \right)^{1/2}.$$

Pour toute matrice A , on a $\operatorname{tr}({}^t A) = \operatorname{tr} A$; par linéarité de la trace, $\operatorname{tr}(\bar{A}) = \overline{\operatorname{tr}(A)}$, et enfin par propriété du module dans $\mathbb{C}$, $|\operatorname{tr}(\bar{A})| = |\operatorname{tr}(A)|$, d'où le résultat.

On aurait aussi pu utiliser le produit scalaire hermitien canonique dans $\mathbb{C}^n$:

$$|\operatorname{tr}(A)| = \left| \sum_{1 \leq i \leq n} a_{ii} \right| \leq \left(\sum_{1 \leq i \leq n} 1^2 \right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{1 \leq i \leq n} |a_{ii}|^2 \right)^{1/2},$$

ce qui donne un meilleur majorant.

Cas d'égalité : l'égalité dans Cauchy-Schwarz correspond au cas de deux vecteurs colinéaires, donc ici on a égalité dans (4) si et seulement si A est un multiple de l'identité. Remarquer qu'en raisonnant dans $\mathbb{C}^n$ plutôt que dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ on trouve bien sûr le même cas d'égalité : le vecteur $(a_{11}, \dots, a_{nn})$ doit être parallèle au vecteur $(1, \dots, 1)$.

Exercice 3. On considère l'équation différentielle

$$x^2 y'' - 2y = 0, \quad x \in I, \quad (5)$$

où I est un intervalle de $\mathbb{R}$.

1. Dans cette question, $I = \mathbb{R}_+^*$. Trouver une solution polynomiale simple de (5), puis avec la méthode d'abaissement du degré (qu'on appelle aussi méthode de Lagrange ou méthode de variation de la constante), trouver une base de l'espace vectoriel des solutions de (5).
-

On cherche n tel que $x \rightarrow x^n$ est solution de (5) pour $x > 0$. En posant $y_n(x) = x^n$, on calcule :

$$x^2 y_n''(x) - 2y_n(x) = (n(n-1) - 2)x^n,$$

et donc la condition portant sur n est $n(n-1) = 2$, et la seule solution dans $\mathbb{N}$ est $n = 2$. La fonction $x \rightarrow x^2$ est solution de (5) dans $\mathbb{R}_+^*$.

Méthode d'abaissement du degré : on cherche une fonction λ telle que $y_0(x) = x^2 \lambda(x)$ soit solution de (5) pour $x > 0$. On va obtenir une équation différentielle d'ordre 1 satisfaite par λ' .

On calcule :

$$y_0' = 2x\lambda + x^2\lambda', \quad y_0'' = 2\lambda + 4x\lambda' + x^2\lambda''.$$

Donc y_0 est solution de (5) sur $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si, pour tout $x > 0$;

$$x^2(2\lambda(x) + 4x\lambda'(x) + x^2\lambda''(x)) - 2x^2\lambda(x) = 0.$$

Les termes en λ se simplifient (c'est toujours le cas quand l'équation est linéaire, et c'est pour cela que la méthode fonctionne), et on obtient

$$\forall x > 0, \quad x^2\lambda''(x) + 4x\lambda'(x) = 0.$$

C'est une équation différentielle d'ordre 1 en l'inconnue λ' , qu'on peut réécrire

$$\forall x > 0, \quad \lambda''(x) = -\frac{4}{x}\lambda'(x). \quad (6)$$

Une solution de (6) est

$$\lambda'(x) = \exp\left(-\int_1^x \frac{4dt}{t}\right) = x^{-4}. \quad (7)$$

Noter qu'ici il suffit de trouver *une* solution de (6). Le choix d'une borne inférieure (ici $x = 1$) dans l'intervalle d'intégration dans (7) correspond au choix d'*une* solution de (6). Par intégration de (7), on trouve

$$\lambda(x) = -\frac{3}{x^3}, \quad x > 0.$$

Noter qu'à nouveau on fait un choix : on ne cherche pas toutes les primitives de (7) mais seulement une primitive de (7). On a donc trouvé que

$$x \rightarrow x^2\lambda(x) = -\frac{3}{x}$$

est solution de (5) dans $\mathbb{R}_+^*$.

On a donc deux solutions de (5) dans $\mathbb{R}_+^*$: $x \rightarrow x^2$ et $x \rightarrow -\frac{3}{x}$. Par linéarité de l'équation, l'ensemble des solutions est un espace vectoriel, et donc $y_2 : x \rightarrow x^2$ et $y_{-1} : x \rightarrow 1/x$ sont solutions. On vérifie que ces deux solutions ne sont pas colinéaires en calculant leur Wronskien :

$$\begin{vmatrix} y_2 & y_{-1} \\ y_2' & y_{-1}' \end{vmatrix} (x) = y_2(x)y_{-1}'(x) - y_2'(x)y_{-1}(x) = -3 \neq 0.$$

Comme l'ensemble des solutions de (5) est un espace vectoriel de dimension deux (puisque (5) est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 résolue en y'' , c'est-à-dire de la forme $y'' = \dots$, et posée sur un intervalle de $\mathbb{R}$), on a donc trouvé une base de l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}_+^*$:

$$\left\{ x \in \mathbb{R}_+^* \rightarrow x^2, x \in \mathbb{R}_+^* \rightarrow \frac{1}{x} \right\}. \quad (8)$$

2. Donner une base de l'espace vectoriel des solutions de (5) avec $I = \mathbb{R}_-^*$.

On reprend les calculs de la question précédente et on observe que le signe de x n'y jouait aucun rôle : c'était seulement le fait que $x \neq 0$ et que x appartienne à un intervalle de $\mathbb{R}$ qui jouait un rôle dans la réponse de la question précédente. En particulier, $x \rightarrow x^2$ et $x \rightarrow 1/x$ sont solutions de (5) dans $\mathbb{R}_-^*$, ce qu'on vérifie aussi par un calcul direct. On a donc une base des solutions de (5) dans $\mathbb{R}_-^*$:

$$\left\{ x \in \mathbb{R}_-^* \rightarrow x^2, x \in \mathbb{R}_-^* \rightarrow \frac{1}{x} \right\}. \quad (9)$$

-
3. Donner une base de l'espace vectoriel des solutions de (5) avec $I = \mathbb{R}$.
-

L'observation principale est la suivante : si y est solution de (5) dans $\mathbb{R}$, alors sa restriction à $\mathbb{R}_+^*$ appartient à l'espace vectoriel engendré par (8), et sa restriction à $\mathbb{R}_-^*$ appartient à l'espace vectoriel engendré par (9). Par ailleurs, quand on évalue l'équation en $x = 0$, on trouve $y(0) = 0$. Donc y est une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ (puisque c'est une solution de l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$) et il existe $(a_+, b_+) \in \mathbb{R}^2$, et $(a_-, b_-) \in \mathbb{R}^2$, tels que

$$y(x) = \begin{cases} a_-x^2 + b_-/x, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ a_+x^2 + b_+/x, & x > 0. \end{cases}$$

La limite de y en 0 à gauche doit être égale à $y(0) = 0$, car y est dérivable donc continue. Cela impose $b_- = 0$. De même, $b_+ = 0$.

Considérons maintenant les limites de y' à gauche et à droite en 0. On a

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} y'(x) = 0 = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} y'(x).$$

Comme y est continue en 0, par conséquence du théorème des accroissements finis, y est dérivable en $x = 0$ et $y'(0) = 0$, et y' est continue en $x = 0$.

Considérons maintenant les limites de y'' à gauche et à droite en 0. On a

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} y''(x) = 2a_-, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} y''(x) = 2a_+.$$

Donc, par conséquence du théorème des accroissements finis, y' est dérivable en 0 si et seulement si $a_- = a_+$.

Sous cette condition, la fonction y s'écrit $y(x) = a_+x^2$ et est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ tout entier.

On vient de prouver que si y est solution de (5) sur $\mathbb{R}$, alors y est un multiple de $x \rightarrow x^2$. Finalement, l'espace vectoriel des solutions de (5) sur $\mathbb{R}$ est la droite vectorielle engendrée par $x \rightarrow x^2$.

Exercice 4. Soit $N : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par

$$N(x_1, x_2) = |x_1 - x_2| + |x_1|, \quad \text{pour tout } (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

1. Montrer que N est une norme dans $\mathbb{R}^2$.
-

Il est clair que N est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. L'homogénéité de N résulte de l'homogénéité de la valeur absolue dans $\mathbb{R}$: pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, pour tout $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$N(\lambda(x_1, x_2)) = N(\lambda x_1, \lambda x_2) = |\lambda x_1 - \lambda x_2| + |\lambda x_1| = |\lambda| |x_1 - x_2| + |\lambda| |x_1| = |\lambda| N(x_1, x_2).$$

Soit (x_1, x_2) tel que $N(x_1, x_2) = 0$. Alors

$$|x_1 - x_2| + |x_1| = 0,$$

et on voit une somme de deux termes positifs qui est nulle. Donc chaque terme dans la somme est nul, ce qui donne le système :

$$\begin{cases} x_1 - x_2 &= 0, \\ x_1 &= 0, \end{cases}$$

dont l'unique solution est $(x_1, x_2) = (0, 0)$.

Finalement, soit $((x_1, x_2), (x'_1, x'_2)) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$:

$$N((x_1, x_2) + (x'_1, x'_2)) = |x_1 + x'_1 - x_2 - x'_2| + |x_1 + x'_1|.$$

On utilise l'inégalité triangulaire pour la valeur absolue dans $\mathbb{R}$:

$$|x_1 + x'_1 - x_2 - x'_2| \leq |x_1 - x_2| + |x'_1 - x'_2|,$$

et

$$|x_1 + x'_1| \leq |x_1| + |x'_1|,$$

ce qui donne

$$N((x_1, x_2) + (x'_1, x'_2)) \leq N(x_1, x_2) + N(x'_1, x'_2).$$

2. Tracer la boule unité de N .

On va commencer par trouver les équations de la sphère unité de N , c'est-à-dire les (x_1, x_2) tels que $N(x_1, x_2) = 1$.

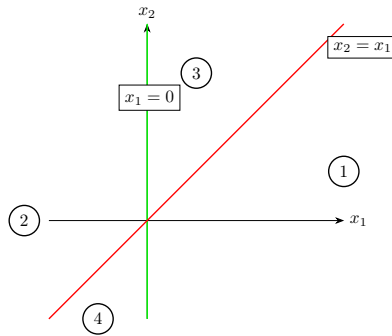
Cas 1 : $x_1 - x_2 > 0$ et $x_1 > 0$. Alors $N(x_1, x_2) = 1$ signifie $2x_1 - x_2 = 1$, ou encore $x_2 = -1 + 2x_1$.

Cas 2 : $x_1 - x_2 > 0$ et $x_1 < 0$. Alors $N(x_1, x_2) = 1$ signifie $x_1 - x_2 - x_1 = 1$, ou encore $x_2 = -1$.

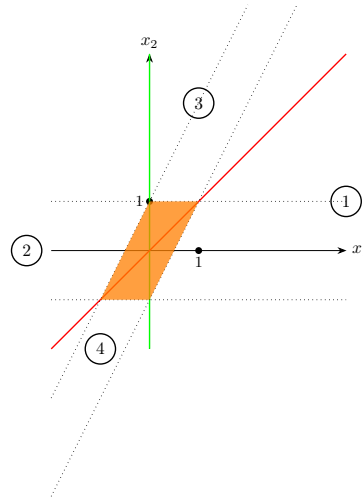
Cas 3 : $x_1 - x_2 < 0$ et $x_1 > 0$. Alors $N(x_1, x_2) = 1$ signifie $x_2 - x_1 + x_1 = 1$, ou encore $x_2 = 1$.

Cas 4 : $x_1 - x_2 < 0$ et $x_1 < 0$. Alors $N(x_1, x_2) = 1$ signifie $-x_1 + x_2 - x_1 = 1$, ou encore $x_2 = 1 + 2x_1$.

On commence par tracer les quatre régions du plan correspondantes aux 4 cas identifiés plus haut :



Puis dans chacune des régions on trace le segment de droite correspondant à l'analyse ci-dessus :



L'origine $(0,0)$ appartient à la boule unité de N , et donc la boule unité de N est la partie du plan qui contient $(0,0)$ et qui est bordée par les 4 équations dans les 4 régions définies plus haut.

3. Trouver des constantes optimales (c'est-à-dire les plus petites possibles) $a > 0$ et $b > 0$ telles que pour tout $x \in \mathbb{R}^2$,

$$\|x\|_\infty \leq aN(x) \leq b\|x\|_\infty.$$

Pour tout $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$N(x_1, x_2) = |x_1 - x_2| + |x_1| \leq |x_1| + |x_2| + |x_1|$$

par l'inégalité triangulaire dans $\mathbb{R}$. Donc

$$N(x_1, x_2) \leq 3\|(x_1, x_2)\|_\infty,$$

et le vecteur $(1, -1)$ montre que l'inégalité est optimale :

$$N(1, -1) = 3 = \|(1, -1)\|_\infty.$$

Par ailleurs, pour tout $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$:

$$|x_1| \leq N(x_1, x_2),$$

et

$$|x_2| \leq |x_2 - x_1| + |x_1|$$

par l'inégalité triangulaire dans $\mathbb{R}$, si bien que

$$|x_2| \leq N(x_1, x_2)$$

et on a donc prouvé que

$$\|(x_1, x_2)\|_\infty \leq N(x_1, x_2).$$

Le vecteur $(0, 1)$ montre que cette inégalité est optimale :

$$\|(0, 1)\|_\infty = 1 = N(0, 1).$$