
DS1 du 10 février 2026 – 17h30 à 19h

Tous les documents et appareils électroniques sont interdits. La qualité de la rédaction tiendra une part importante dans l'évaluation des copies.

Exercice 1. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, et l'application $\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(x, x') = ax_1x'_1 + x_2x'_2 + bx_1x'_3 + x_3x'_1 + x_3x'_3, \quad x = (x_1, x_2, x_3), \quad x' = (x'_1, x'_2, x'_3).$$

1. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur (a, b) pour que φ soit un produit scalaire.
2. Dans les cas où φ est un produit scalaire, donner une base de $(\text{vect}\{(0, 1, 1)\})^\perp$.

Exercice 2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Rappeler la définition du produit scalaire hermitien usuel dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
2. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer l'inégalité

$$|\text{tr}(A)| \leq n^{1/2} \left(\sum_{1 \leq i,j \leq n} |a_{i,j}|^2 \right)^{1/2},$$

et étudier le cas d'égalité.

Exercice 3. On considère l'équation différentielle

$$x^2 y'' - 2y = 0, \quad x \in I, \tag{1}$$

où I est un intervalle de $\mathbb{R}$.

1. Dans cette question, $I = \mathbb{R}_+^*$. Trouver une solution polynomiale simple de (1), puis avec la méthode d'abaissement du degré (qu'on appelle aussi méthode de Lagrange ou méthode de variation de la constante), trouver une base de l'espace vectoriel des solutions de (1).
2. Donner une base de l'espace vectoriel des solutions de (1) avec $I = \mathbb{R}_-^*$.
3. Donner une base de l'espace vectoriel des solutions de (1) avec $I = \mathbb{R}$.

Exercice 4. Soit $N : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par

$$N(x_1, x_2) = |x_1 - x_2| + |x_1|, \quad \text{pour tout } (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

1. Montrer que N est une norme dans $\mathbb{R}^2$.
2. Tracer la boule unité de N .
3. Trouver des constantes optimales (c'est-à-dire les plus petites possibles) $a > 0$ et $b > 0$ telles que pour tout $x \in \mathbb{R}^2$,

$$\|x\|_\infty \leq aN(x) \leq b\|x\|_\infty.$$