DS du 11 février 2025

À toutes fins utiles, on rappelle les formules trigonométriques :

$$\begin{aligned} 2 \cos(a) \cos(b) &= \cos(a - b) + \cos(a + b), \\ 2 \sin(a) \sin(b) &= \cos(a - b) - \cos(a + b). \end{aligned}$$

Exercice 1. On considère l'équation différentielle suivante :

$$(E) : (x + 1)^2 y'' - 3(x + 1)y' + 4y = 0$$

On note $I_1 =] - \infty, -1[$ et $I_2 =] - 1, +\infty[$.

1. a) Montrer que s'il existe une solution polynomiale non nulle, elle est de degré 2.
Indication : On pourra s'intéresser aux termes de plus haut degré
 b) Déterminer une solution polynomiale non nulle sur $\mathbb{R}$.
2. Par la méthode d'abaissement de l'ordre (ou méthode de Lagrange), en déduire l'ensemble des solutions sur I_1 et l'ensemble des solutions sur I_2 .
3. Déterminer les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ entier.
4. Déterminer sur I_2 les solutions de l'équation

$$(E') : (x + 1)^2 y'' - 3(x + 1)y' + 4y = (x + 1)^3$$

Exercice 2. On considère l'espace $E = \{f \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R}) / f(0) = 0\}$. On le munit de deux produits scalaires :

- le produit scalaire usuel : $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t) dt$ et sa norme associée $\| \cdot \|$;
- un second produit scalaire : $\phi(f, g) = \int_0^1 f'(t)g'(t) dt$ et sa norme associée N .

1. Montrer que ϕ est bien un produit scalaire.
2. Montrer que, pour tout $f \in E$ et $t \in [0, 1]$,

$$f(t)^2 \leq t \int_0^t f'(u)^2 du.$$

Indication : On pourra d'abord exprimer f en fonction de f' . Quand a-t-on égalité ?

3. En déduire que : pour tout $f \in E$,

$$\|f\| \leq \frac{1}{\sqrt{2}} N(f).$$

Quand a-t-on égalité ?

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n : x \mapsto \frac{1}{n} \sin(n^2 \pi x)$. Montrer que $\|f_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ et $N(f_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$.
5. Montrer que $\| \cdot \|$ et N ne sont pas équivalentes sur E . Qu'en déduire sur la dimension de E ?

Exercice 3. Sur l'espace des polynômes à coefficients réels $\mathbb{R}[X]$, on considère :

$$\phi : \begin{cases} \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (P, Q) & \longmapsto & \int_0^\pi P(\cos \theta) Q(\cos \theta) d\theta \end{cases}$$

1. Montrer que ϕ est un produit scalaire.
2. On définit une suite de polynômes $(T_n)_{n \geq 0}$ par la relation de récurrence :

$$\begin{cases} T_0 & = 1 \\ T_1 & = X \\ T_{n+2} & = 2XT_{n+1} - T_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Montrer que, pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$, $T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta)$.

3. Montrer que $(T_n)_{n \geq 0}$ est une famille orthogonale pour ϕ .