**Université Claude Bernard - Lyon 1** Semestre de printemps 2024-2025
Maths IV PMI

---

**DS du 11 février 2025 corrrection de l'exo 1**

---

**Exercice 1.** On considère l'équation différentielle suivante :

$$(E): \quad (x+1)^2y'' - 3(x+1)y' + 4y = 0$$

On note $I_1 = ]-\infty, -1[$ et $I_2 = ]-1, +\infty[$.

**1.** a) Montrer que s'il existe une solution polynomiale non nulle, elle est de degré 2.
*Indication : On pourra s'intéresser aux termes de plus haut degré*
Cherchons une solution polynomiale $y$, le coefficient dominant étant non nul et $y$ étant définie à une constante multiplicative près on peut chercher $y$ sous la forme $y(x) = x^d + \sum_{k=0}^{d-1} a_k x^k$.
Commençons par identifier les termes de plus haut degré pour obtenir une contrainte sur $d$.

$$\begin{cases} \text{Le terme dominant de : } (x+1)^2y''(x) \text{ est } d(d-1)x^d \\ \text{Le terme dominant de : } -3(x+1)y'(x) \text{ est } -3dx^d \\ \text{Le terme dominant de : } 4y(x) \text{ est } 4x^d \end{cases}$$

Or un polynôme est nul si et seulement si chacun de ses coefficients est nul. Ainsi les termes de degré $d$, nous donnent :

$$d(d-1) - 3d + 4 = 0 \Rightarrow \quad d^2 - 4d + 4 = 0 \quad \Rightarrow (d-2)^2 = 0 \Rightarrow \quad d = 2$$

S'il existe une solution polynomiale non nul, elle doit être de degré 2.

b) Déterminer une solution polynomiale non nulle sur $\mathbb{R}$.
Nous cherchons donc une solution de la forme $y_1(x) = x^2+ax+b$. En injectant dans l'équation on obtient :

$$(x+1)^2 \cdot 2 - 3(x+1)(2x+a) + 4(x^2+ax+b) = 0$$

Développons :

$$2(x^2+2x+1) - 3(2x^2+(2+a)x+a) + 4(x^2+ax+b) = 0$$

Ce qui donne :

$$(2-6+4)x^2 + (4-6-3a+4a)x + (2-3a+4b) = 0$$

Simplifions :

$$(-2+a)x + (2-3a+4b) = 0$$

Par suite :

$$a = 2$$

$$2 - 3a + 4b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4b = 4 \Leftrightarrow \quad b = 1$$

La solution de $(E)$ est :

$$y_1(x) = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$$

**2.** Par la méthode d'abaissement de l'ordre (ou méthode de Lagrange), en déduire l'ensemble des solutions sur $I_1$ et l'ensemble des solutions sur $I_2$.
Prenons $y_2$ une solution de $(E)$ (normaliser) indépendantes $y_1$. Posons $z(x) = \frac{y_2(x)}{(x+1)^2}$ alors $y_2(x) = z(x)(x+1)^2$, et

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[(x+1)^2 \cdot z(x)\right] - 3\frac{1}{(x+1)}\frac{d}{dx}\left[(x+1)^2 \cdot z(x)\right] + 4z(x) = 0$$

Or

$$\frac{1}{x+1}\frac{d}{dx}\left[(x+1)^2 \cdot z(x)\right] = \frac{2(x+1)\cdot z(x) + (x+1)^2 \cdot z'(x)}{x+1} = 2 \cdot z(x) + (x+1)\cdot z'(x)$$

Et
$$\frac{d^2}{dx^2}\left[(x+1)^2\cdot z(x)\right]=2z(x)+4(x+1)z'(x)+(x+1)^2z''(x)$$
En regroupant les termes on obtient donc :
$$\left[2z(x)+4(x+1)z'(x)+(x+1)^2z''(x)\right]-3\cdot\left[2z(x)+(x+1)z'(x)\right]+4z(x)=0$$
L'équation vérifiée par $z$ est donc :
$$z''(x)(x+1)^2+z'(x)\big[4(x+1)-3(x+1)\big]+z(x)\big[2-6+4\big]=0$$
D'où
$$(x+1)^2z''(x)+(x+1)z'(x)=0$$
L'équation normalisée est donc :
$$z''(x)+\frac{1}{x+1}z'(x)=0$$
La solution est donnée par :
$$z'(x)=\exp\left(-\int\frac{1}{t+1}\,\mathrm{d}t\right)=\exp\big(-\ln|x+1|\big)=\pm\frac{1}{x+1}$$
Comme $z'$ est définie à une constante multiplicative près. On peut prendre $z'(x)=\frac{1}{x+1}$, alors :
$$z(x)=\ln|x+1|$$
Une deuxième solution est donc $y_2(x)=(x+1)^2\ln|x+1|$, l'ensemble des solutions sur $I_1$ et $I_2$ est donné par :
$$\left\{x\mapsto\lambda(x+1)^2+\mu(x+1)^2\ln|x+1|\middle\backslash\lambda,\mu\in\mathbb{R}\right\}$$

**3.** Déterminer les solutions de $(E)$ sur $\mathbb{R}$ entier.
$f$ est solution de $(E)$ sur $\mathbb{R}$ entier si $f$ est de la forme :
$$f(x)=\begin{cases}\lambda_1(x+1)^2+\mu_1(x+1)^2\ln|x+1| & \text{si } x<-1\\ \\ \lambda_2(x+1)^2+\mu_2(x+1)^2\ln(1+x) & \text{si } x>-1\end{cases}$$
et $f$ est prolongeable en une fonction $\mathcal{C}^2$. Pour cela il faut et il suffit que $f,f',f''$ admettent des limites finies en $-1$ et que :
$$\lim_{x\to-1^-}f(x)=\lim_{x\to-1^+}f(x),\quad \lim_{x\to-1^-}f'(x)=\lim_{x\to-1^+}f'(x)\quad\text{et}\quad\lim_{x\to-1^-}f''(x)=\lim_{x\to-1^+}f''(x)$$
Posons $h(x)=(x+1)^2\ln|1+x|$ alors $h'(x)=2(x+1)\ln|x+1|+(x+1)$ et $h''(x)=2\ln|x+1|+3$
D'où
$$\lim_{x\to-1}h''(x)=-\infty$$
Donc $f''$ a une limite finie en -1 si et seulement si $\mu_1=\mu_2=0$. Dans ce cas-là $f\in C^2$ si et seulement si $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$ i.e $f\in\mathrm{Vect}\{x\mapsto(x+1)^2\}$. Les seules solutions sur $\mathbb{R}$ sont celles trouvées en 1).

**4.** Déterminer sur $I_2$ les solutions de l'équation
$$(E'):\quad (x+1)^2y''-3(x+1)y'+4y=(x+1)^3$$
On va appliquer la méthode de la dérivation par les constantes.On cherche donc $y$ sous la forme $y(x)=\lambda(x)(x+1)^2+\mu(x)(x+1)^2\ln(x+1)$ où $\lambda(x),\mu(x)$ sont solutions du système :
$$\begin{pmatrix}0\\x+1\end{pmatrix}=M(x)\cdot\begin{pmatrix}\lambda'(x)\\\mu'(x)\end{pmatrix}\quad\text{où } M \text{ est la matrice fondamentale.}$$
$$M=\begin{pmatrix}(x+1)^2 & (x+1)^2\ln(x+1)\\ 2(x+1) & 2(x+1)\ln(x+1)+(x+1)\end{pmatrix}$$

Le déterminant de $M$ est donné par :

$$\det M = 2\Big[(x+1)^3\ln(x+1)\Big] - 2(x+1)^3\ln(x+1) + (x+1)^3 = (x+1)^3$$

D'où :

$$M(x)^{-1} = \frac{1}{(x+1)^3}\begin{pmatrix} * & -(x+1)^2\ln(x+1) \\ * & (x+1)^2 \end{pmatrix}$$

Ainsi

$$\begin{pmatrix} \lambda'(x) \\ \mu'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & -(x+1)^{-1}\ln(x+1) \\ * & (x+1)^{-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ x+1 \end{pmatrix}$$

Finalement :

$$\lambda'(x) = -\ln(x+1) \quad \text{et} \quad \mu'(x) = 1$$

Or une intégration par partie donne :

$$\begin{aligned} \int 1 \times \ln(x+1)\,\mathrm{d}x &= \big[(x+1)\ln(x+1)\big] - \int (x+1)\frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x \\ &= (x+1)\ln(x+1) - \int 1\,\mathrm{d}x \\ &= (x+1)\ln(x+1) - (x+1) \end{aligned}$$

D'où

$$\lambda(x) = -(x+1)\ln(x+1) + (x+1) \quad \text{et} \quad \mu(x) = x+1$$

$g(x) = -(x+1)^3\ln(x+1) + (x+1)^3 + (x+1)^3\ln(x+1) = (x+1)^3$ est une solution particulière de $(E')$.

L'ensemble des solutions de $(E')$ sur $I_2$ est donné par :

$$\Big\{x \mapsto (x+1)^3 + \mu(x+1)^2 + \lambda(x+1)^2\ln(x+1) \Big\backslash \lambda,\mu \in \mathbb{R}\Big\}$$