Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2014-2015

Cursus préparatoire, 1ère année Durée : 1h30

Partie commune - Devoir numéro 1 - Correction

Exercice 1. 1. Fixons $n \in \mathbb{N}$. Par définition, on a

$$A \cdot X_n = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2u_{n+1} + 3u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = X_{n+1} \ .$$

2. Pour justifier que P est inversible, on peut calculer son déterminant, qui vaut $1 \cdot 1 - 3 \cdot (-1) = 4$. Pour calculer l'inverse de P, on peut soit appliquer une formule connue pour donner l'inverse d'une matrice 2×2, soit revenir à la définition : en notant $P^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, le fait que $P \cdot P^{-1} = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ nous amène au système suivant :

$$\begin{cases} a + 3c = 1 \\ b + 3d = 0 \\ -a + c = 0 \\ -b + d = 1 \end{cases}$$

On obtient donc

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3. On écrit le produit de matrices :

$$\begin{aligned} D = P^{-1} \cdot A \cdot P = P^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} &= P^{-1} \begin{pmatrix} 2-3 & 6+3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 9 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \ . \end{aligned}$$

4. Raisonnons par récurrence sur n ; la formule désirée est vraie pour $n = 0$: $A^0 = I$, et $P^{-1} \cdot A^0 \cdot P = P^{-1} \cdot P = I$. On a aussi, par définition de D, que la formule est vraie pour $n = 1$: en multipliant à gauche par P et à droite par P^{-1}, l'égalité $D = P^{-1} \cdot A \cdot P$ devient $P \cdot D \cdot P^{-1} = A$.

Supposons maintenant la formule vérifiée jusqu'à un rang $n \geq 1$. On a alors :

$$A^{n+1} = A \cdot A^n = \left(P \cdot D \cdot P^{-1}\right) \cdot \left(P \cdot D^n \cdot P^{-1}\right) = P \cdot D \cdot \left(P^{-1} \cdot P\right) \cdot D^n \cdot P^{-1} = P \cdot D^{n+1} \cdot P^{-1} \ .$$

Comme la matrice D est diagonale, on obtient par une récurrence immédiate que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $D^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$. Il nous reste à calculer un dernier produit de matrices : pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} A^n = P \cdot D^n \cdot P^{-1} &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^n & 3(-1)^{n+1} \\ 3^n & 3^n \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} (-1)^n + 3^{n+1} & 3(-1)^{n+1} + 3^{n+1} \\ (-1)^{n+1} + 3^n & 3(-1)^n + 3^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

5. Raisonnons de nouveau par récurrence sur n. Pour $n = 0$, on a $X_0 = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix} = A^0 \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}$. La formule désirée est donc bien vraie au rang 0 ; supposons-la vérifiée à un rang $n \geq 0$, et utilisons le fait que $X_{n+1} = A \cdot X_n$ pour écrire

$$X_{n+1} = A \cdot X_n = A \cdot A^n \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix} = A^{n+1} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix} \ .$$

On peut donc conclure que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $X_n = A^n \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}$.

6. Etant donnée la formule que l'on avait obtenue pour A^n, et le fait que u_n est égal à la deuxième coordonnée de X_n, on obtient finalement que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$u_n = \frac{1}{4}\left[\left((-1)^{n+1} + 3^n\right) u_1 + \left(3(-1)^n + 3^n\right) u_0 \right] .$$

(Notons, à titre de vérification partielle de nos calculs, que cette formule a le bon goût de nous redonner $u_0 = u_0$ et $u_1 = u_1$, ce qui est rassurant).

Exercice 2. On peut par exemple utiliser la formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned} P(X) = (X^2+1)^n - 2X^{2n} + (X^2-1)^n &= \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^{2k}\right) - 2X^{2n} + \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^{2k}(-1)^{n-k}\right) \\ &= \left(\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} X^{2k}\right) + \left(\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} X^{2k}(-1)^{n-k}\right) \end{aligned}$$

Si jamais $n = 1$, on obtient $P(X) = 1 - 1 = 0$: le degré de P est alors $-\infty$.
Si $n \geq 2$, on peut isoler les termes de plus haut degré et écrire $P(X) = 2\binom{n}{n-2} X^{2n-4} + Q(X)$, où Q est de degré strictement inférieur à $2n-4$. Par conséquent, P est de degré $2n-4$ quand n est supérieur ou égal à 2.

Exercice 3. 1. Soit $x > 0$. Alors on a aussi $e^{-x} > 0$, par conséquent $xe^{-x} > 0$, et on vient de montrer que $x > 0 \Rightarrow f(x) > 0$, autrement dit $f(]0, +\infty[) \subset]0, +\infty[$.

2. Par récurrence, on voit grâce au résultat de la question précédente que $u_n > 0$ pour tout n. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_{n+1} - u_n = u_n(e^{-u_n} - 1) < 0$ puisque $u_n > 0$.

   Par conséquent, (u_n) est décroissante (strictement).

3. D'après les résultats des questions précédentes, (u_n) est une suite décroissante de réels positifs : elle est convergente vers $l \in [0, +\infty[$. De plus, puisque $f(u_n) = u_{n+1}$ et f est continue sur $\mathbb{R}$, on obtient à la limite que $f(l) = l$, autrement dit $le^{-l} = l$, soit encore $l(e^{-l} - 1) = 0$, ce qui n'est possible que si $l = 0$. Par conséquent (u_n) converge vers 0.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$v_n = \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = \frac{u_n - u_{n+1}}{u_n u_{n+1}} = \frac{u_n(1 - e^{-u_n})}{u_n u_n e^{-u_n}} = \frac{1 - e^{-u_n}}{u_n e^{-u_n}} = e^{u_n}\left(\frac{1 - e^{-u_n}}{u_n}\right) .$$

   Comme (u_n) converge vers 0, e^{u_n} tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$. De plus, on sait que $\dfrac{e^x - 1}{x}$ tend vers $\exp'(0) = 1$ quand x tend vers 0 (c'est un taux d'accroissement ; on pourrait aussi, de manière équivalente, utiliser le développement limité à l'ordre 1 en 0 de $x \mapsto e^x$) ; puisque (u_n) tend vers 0, la formule ci-dessus permet donc de conclure que (v_n) tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$.

5. En appliquant le résultat fourni par l'énoncé (qui est un cas particulier du *lemme de Cesàro*), on sait que $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} v_k$ converge vers 1. Mais on a

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} v_k = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{u_{k+1}} - \frac{1}{u_k}\right) = \frac{1}{n}\left[\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{u_k}\right) - \left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{u_k}\right)\right] = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_0}\right) .$$

Finalement, on sait donc que $\dfrac{1}{nu_n} - \dfrac{1}{nu_0}$ converge vers 1 quand n tend vers $+\infty$, autrement dit que $\dfrac{1}{nu_n}$ tend vers 1, ce qui revient à dire que nu_n tend vers 1, ce qu'on peut encore reformuler sous la forme $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.

Exercice 4.

1. (a) Notons déjà que g est bien définie parce que arctan est définie sur $\mathbb{R}$; sur $\left[\arctan(a), \dfrac{\pi}{2}\right[$, g est une composée de fonctions continues et est donc continue. Pour vérifier que g est continue en $\dfrac{\pi}{2}$, on doit calculer la limite de $g(x)$ quand x tend vers $\dfrac{\pi}{2}$ par valeurs inférieures ; dans ce cas-là on a que $\tan(x)$ tend vers $+\infty$, donc, par hypothèse sur f, $g(x) = f(\tan x)$ tend vers $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = f(a)$. Puisque par définition $f(a) = g\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$, on vient de montrer que f est continue sur $\left[\arctan(a), \dfrac{\pi}{2}\right]$.
   Sur $\left]\arctan(a), \dfrac{\pi}{2}\right[$ g est une composée de deux fonctions dérivables (puisque tan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\tan\left(\left]\arctan(a), \dfrac{\pi}{2}\right[\right) =]a, +\infty[$, intervalle sur lequel f est dérivable), et on a, d'après la formule de dérivation d'une fonction composée :
   $$\forall x \in \left]\arctan(a), \frac{\pi}{2}\right[\quad g'(x) = f'(\tan x)\tan'(x) = (1 + \tan^2(x))f'(\tan x)\ .$$
   (b) La fonction g est continue sur $\left[\arctan(a), \dfrac{\pi}{2}\right]$, dérivable sur $\left]\arctan(a), \dfrac{\pi}{2}\right[$, et $g(\arctan(a)) = g\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$: on peut appliquer le théorème de Rolle pour conclure qu'il existe $x \in \left]\arctan(a), \dfrac{\pi}{2}\right[$ tel que $g'(x) = 0$. D'après la formule pour $g'(x)$ obtenue ci-dessus, cela revient à dire qu'il existe $c \in]a, +\infty[$ tel que $f'(c) = 0$.

2. Utilisons la fonction f suggérée par l'énoncé, et énumérons de manière strictement croissante les racines de P sous la forme $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n$, avec $n \geq q$. Pour tout $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ on a $f(\alpha_i) = 0$; par conséquent le théorème de Rolle appliqué à f (qui est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$) nous permet d'affirmer que f' s'annule quelque part dans $]\alpha_i, \alpha_{i+1}[$ pour tout $i \in \{0, \ldots, n-1\}$. Puisque $f'(x) = e^{\lambda x}(P'(x) + \lambda P(x))$ et $e^{\lambda x} \neq 0$ pour tout x, on vient d'obtenir $n-1$ racines réelles distinctes pour $P' + \lambda P$ (donc si $n > q$ on a gagné ; si $n = q$ il nous manque une racine).

   Vu le résultat de la question précédente, on s'intéresse à la limite de f en $+\infty$; les croissances comparées nous permettent de voir que celle-ci existe et vaut 0 (parce que λ est strictement négatif). Par conséquent, il existe $c \in]\alpha_n, +\infty[$ tel que $f'(c) = 0$, ce qui nous fournit une nouvelle racine de $P' + \lambda P$ (les autres étaient toutes strictement inférieures à α_n, et celle-ci est strictement supérieure à α_n), et on a bien obtenu que $P' + \lambda P$ a au moins n racines distinctes, ce qui nous permet de conclure puisque $n \geq q$.

3. Si $\lambda < 0$, on peut appliquer le résultat précédent à $\tilde{\lambda} = -\lambda$ et $\tilde{P}$ défini par $\tilde{P}(X) = P(-X)$: $\tilde{P}' - \lambda\tilde{P}$ a au moins q racines réelles distinctes d'après le résultat précédent, et puisque $\tilde{P}'(X) - \lambda\tilde{P}(X) = -P'(-X) - \lambda P(-X) = -(P'(-X) + \lambda P(-X))$, on obtient le même résultat que précédemment.

   Remarque. On pourrait aussi démontrer que le résultat reste vrai quand $\lambda > 0$ en raisonnant sur $]-\infty, a]$, en considérant la limite en $-\infty$ de f, et en établissant un résultat analogue à celui de (1a) valable sur un intervalle de la forme $]-\infty, a]$.

4. Dans le cas où $\lambda = 0$, on est bien embêté : par exemple, le polynôme P donné par $P(X) = X$ a une racine réelle, mais $P' + 0P = P' = 1$ n'a pas de racine réelle. Le mieux qu'on puisse dire, à l'aide du théorème de Rolle, est que si P a au moins q racines réelles distinctes alors P' a au moins $q-1$ racines réelles distinctes.