Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre d'automne 2013-2014

Math III - PMI Durée : 1 heure et 30 minutes

Partie commune - Devoir numéro 1

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Dans toutes les questions, il sera tenu le plus grand compte de la rigueur de la rédaction ; ***toute réponse insuffisamment justifiée sera considérée comme nulle****.*

Les quatres exercices sont indépendants.

Exercice 1. Les fonctions suivantes sont-elles absolument intégrables sur les intervalles considérés :

1. $f : t \longmapsto \sqrt{t(1-t)}$ sur $[0;1]$,
2. $g : t \longmapsto \sin\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ sur $]0;+\infty[$,
3. $h : t \longmapsto e^{-\sqrt{\ln t}}$ sur $[e;+\infty[$.

   Indication : on pourra commencer par comparer entre eux les réels $\sqrt{\ln(t)}$ *et* $\ln(t)$ *pour* $t \in [e;+\infty[$.

Exercice 2. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On note u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est A. Dans toute la suite, on désigne par Id l'application identité de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$

1. Déterminer une base de $\operatorname{Ker}(u - 2\,\mathrm{Id})$.
2. Déterminer une base du noyau de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -6 \\ 3 & 4 & -6 \\ 3 & 4 & -6 \end{pmatrix}$.
3. Écrire la matrice dans la base canonique de l'endomorphisme $(u - 2\,\mathrm{Id})^2$.
4. Un calcul **non demandé** montre que $\operatorname{Ker}(u - 3\,\mathrm{Id})$ est engendré par le vecteur $e'_1 = (1,1,1)$. Démontrer que
$$\mathbb{R}^3 = \operatorname{Ker}(u - 3\,\mathrm{Id}) \oplus \operatorname{Ker}((u - 2\,\mathrm{Id})^2).$$
5. *Un résultat intermédiaire :* soit v un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de rang 2 tel que $v^2 \neq 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$ et tel que $\operatorname{Ker} v \neq \operatorname{Ker} v^2$.
   (a) Démontrer que $\operatorname{Ker} v \subset \operatorname{Ker}(v^2)$.
   (b) Déterminer avec soin la dimension de $\operatorname{Ker} v$ et de $\operatorname{Ker} v^2$.
   (c) En déduire que si a est un vecteur de $\operatorname{Ker}(v^2) \setminus \operatorname{Ker} v$, alors la famille $(a, v(a))$ est une base de $\operatorname{Ker}(v^2)$.
6. On pose désormais $v = u - 2\,\mathrm{Id}$, où u est toujours l'endomorphisme donné au début de l'exercice.
   (a) Déterminer un vecteur e'_2 appartenant à $\operatorname{Ker}(v^2) \setminus \operatorname{Ker} v$. On pose $e'_3 = v(e'_2)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$.
   (b) Expliquer avec soin pourquoi $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$ (on citera les numéros des questions utilisées).
   (c) Écrire la matrice de l'endomorphisme u dans la base $\mathcal{B}'$.

Exercice 3. Soient a et b deux réels strictement positifs. Déterminer la limite (si elle existe) de $\left(\dfrac{a^x + b^x}{2}\right)^{1/x}$ lorsque x tend vers 0.

Exercice 4. Soient a et b deux réels.

1. Déterminer en fonction des paramètres a et b un équivalent de $\dfrac{t^a e^{-t}}{1 + t^b}$ lorsque t tend vers 0^+.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les paramètres a et b pour que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^a e^{-t}}{1 + t^b}\,\mathrm{d}t$ existe.

Correction du Devoir Surveillé 1 - partie commune

Correction de l'exercice 1

1. La fonction f est continue sur le segment $[0;1]$ donc elle est absolument intégrable sur $[0;1]$.

2. La fonction g est continue sur $]0;+\infty[$ donc absolument intégrable sur tout segment inclus dans $]0;+\infty[$.
   • Au voisinage de $+\infty$: on a $|g(t)| = \sin\left(\dfrac{1}{t^2}\right) \sim_{+\infty} \dfrac{1}{t^2} \geq 0$ et la fonction de Riemann $t \longmapsto \dfrac{1}{t^2}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$, donc $|g|$ est intégrable au voisinage de $+\infty$.

   • Au voisinage de 0 : on a $|g(t)| \leq 1$ et la fonction constante égale à 1 est intégrable au voisinage de 0 (fonction continue sur $[0;M]$ pour tout $M > 0$). Ainsi, $|g|$ est intégrable au voisinage de 0.

   Ainsi, g est absolument intégrable sur $]0;+\infty[$.

3. La fonction h est continue sur $[e;+\infty[$, à valeurs positives, donc intégrable sur tout segment inclus dans $[e;+\infty[$. Soit $t \in [e;+\infty[$, alors $\ln(t) \geq 1$ donc $\sqrt{\ln(t)} \leq \ln(t)$. Par décroissance de $x \mapsto e^{-x}$, on en déduit que $h(t) = e^{-\sqrt{\ln(t)}} \geq e^{-\ln(t)} = \dfrac{1}{t} \geq 0$. Comme la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{t}$ n'est pas intégrable sur $[e;+\infty[$, cela implique que h n'est pas intégrable sur $[e:+\infty[$.

Correction de l'exercice 2

1. Soit $X = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. On a l'équivalence suivante :

$$X \in \operatorname{Ker}(u - 2\operatorname{Id}) \iff (u-2\operatorname{Id})(X) = 0_{\mathbb{R}^3} \iff (A - 2I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} -x + 4y - z = 0 \\ 4y - 3z = 0 \end{cases} \underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\iff} \begin{cases} -x + z = 0 \\ 4y - 3z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = z \\ y = \dfrac{3}{4}z \end{cases}$$

   Ainsi, $\operatorname{Ker}(u - 2\operatorname{Id}) = \operatorname{Vect}_{\mathbb{R}}\{(4,3,4)\}$.

2. Il est clair que l'espace vectoriel engendré par les colonnes de la matrice B est $\operatorname{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$, donc la matrice B est de rang 1. Notons w l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont B est la matrice dans $\mathcal{B}$. D'après le théorème du rang, on en déduit que $\dim \operatorname{Ker} w = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \operatorname{Im} w = 3 - 1 = 2$. Il nous suffit donc de trouver deux vecteurs dans $\operatorname{Ker} w$ non colinéaires. On remarque que $w(4,-3,0) = 0_{\mathbb{R}^3}$ et $w(2,0,1) = 0_{\mathbb{R}^3}$, donc la famille $((4,-3,0),(2,0,1))$ est une famille libre (car les deux vecteurs ne sont pas colinéaires), composée de deux éléments de $\operatorname{Ker} w$, avec $\dim \operatorname{Ker} w = 2$, c'est donc une base de $\operatorname{Ker} w$.

3. Un calcul direct donne $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}((u - 2\operatorname{Id})^2) = (A - 2I_3)^2 = B$. On remarque donc que l'endomorphisme w n'est rien d'autre que $(u - 2\operatorname{Id})^2$.

4. Puisque $\operatorname{Ker}(u - 3\operatorname{Id}) = \operatorname{Vect}\{(1,1,1)\}$ et que le vecteur $(1,1,1)$ n'est pas nul, $\operatorname{Ker}(u - 3\operatorname{Id})$ est de dimension 1. Ainsi, on a $\dim \operatorname{Ker}(u - 3\operatorname{Id}) + \dim \operatorname{Ker}((u - 2\operatorname{Id})^2) = 1 + 2 = \dim \mathbb{R}^3$.

   Soit $X = (x,y,z) \in \operatorname{Ker}(u - 2\operatorname{Id}) \cap \operatorname{Ker}((u - 2\operatorname{Id})^2)$. Alors il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $X = \alpha(1,1,1)$, et de plus $(u - 2\operatorname{Id})^2(X) = 0_{\mathbb{R}^3}$. Or

$$B\begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \\ \alpha \end{pmatrix} \text{ est égal à } 0_{\mathbb{R}^3} \text{ si et seulement si } \alpha = 0.$$

   Ceci implique que $X = 0_{\mathbb{R}^3}$ et donc $\operatorname{Ker}(u - 3\operatorname{Id}) \cap \operatorname{Ker}((u - 2\operatorname{Id})^2) \subset \{0_{\mathbb{R}^3}\}$. L'implication réciproque étant vraie puisque les noyaux sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$, on obtient finalement $\operatorname{Ker}(u - 3\operatorname{Id}) \cap \operatorname{Ker}((u - 2\operatorname{Id})^2) = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$, ce qui permet de conclure que $\mathbb{R}^3 = \operatorname{Ker}(u - 3\operatorname{Id}) \cap \operatorname{Ker}((u - 2\operatorname{Id})^2)$.

5. (a) Soit $x \in \operatorname{Ker} v$, alors $v(x) = 0$. Mais alors $v^2(x) = v(v(x)) = v(0) = 0$ par linéarité de v, donc $x \in \operatorname{Ker}(v^2)$. Ainsi, on a bien $\operatorname{Ker}(v) \subset \operatorname{Ker}(v^2)$.

   (b) Puisque $\operatorname{rang}(v) = 2$, le théorème du rang implique que $\dim \operatorname{Ker}(v) = 1$. Or on a $\operatorname{Ker} v \subsetneq \operatorname{Ker}(v^2)$, et $\operatorname{Ker}(v^2) \subset \mathbb{R}^3$, donc on a aussi $1 < \dim Ker(v^2) \leq 3$. De plus, on ne peut pas avoir $\dim \operatorname{Ker}(v^2) = 3$, sinon $\operatorname{Ker}(v^2) = \mathbb{R}^3$, et donc $v^2 = 0_{\mathcal{L}(R^3)}$, ce qui est absurde. Par conséquent, $\dim \operatorname{Ker}(v^2) = 2$.

   (c) Soit $a \in \operatorname{Ker}(v^2) \setminus \operatorname{Ker}(v)$. Comme la famille $(a, v(a))$ est composée de deux vecteurs de $\operatorname{Ker}(v^2)$ (car $v^2(v(a)) = v(v^2(a)) = 0$), et $\dim \operatorname{Ker}(v^2) = 2$, il suffit de montrer que la famille est libre pour savoir que c'est une base de $\operatorname{Ker}(v^2)$. Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda a + \mu v(a) = 0_{\mathbb{R}^3}$ $(*)$. En appliquant v à ceci, on obtient par linéarité de v : $\lambda v(a) + \mu v^2(a) = 0_{\mathbb{R}^3}$ ce qui s'écrit encore $\lambda v(a) = 0_{\mathbb{R}^3}$ puisque $a \in \operatorname{Ker}(v^2)$. Comme de plus $a \notin \operatorname{Ker}(v)$, on sait que $v(a) \neq 0_{\mathbb{R}^3}$ et donc $\lambda = 0$. En remplaçant ceci dans $(*)$, on trouve finalement $\mu = 0$, donc la famille $(a, v(a))$ est libre. C'est donc une base de $\operatorname{Ker}(v^2)$.

6. (a) Avec nos notations précédentes, on a $v^2 = w$, et on a vu que $\operatorname{Ker}(w) = \operatorname{Vect}\{(4, -3, 0), (2, 0, 1)\}$. Comme $\operatorname{Ker}(v) = \operatorname{Ker}(u - 2\operatorname{Id}) = \operatorname{Vect}\{(4, -3, 4)\}$, on peut prendre n'importe lequel des deux vecteurs précédents afin d'avoir un élément de $\operatorname{Ker}(v^2) \setminus \operatorname{Ker}(v)$. Posons $e'_2 = (2, 0, 1)$.

   (b) D'après la question 4, $\mathbb{R}^3 = \operatorname{Ker}(u - 3\operatorname{Id}) \oplus \operatorname{Ker}(v^2)$ donc si l'on concatène une base de $\operatorname{Ker}(u - 3\operatorname{Id})$ avec une base de $\operatorname{Ker}(v^2)$, on obtient une base de $\mathbb{R}^3$. On a déjà vu que e'_1 est une base de $\operatorname{Ker}(u - 3\operatorname{Id})$. En outre, e'_2 appartient à $\operatorname{Ker}(v^2) \setminus \operatorname{Ker}(v)$ et la question 5c démontre donc que $(e'_2, e'_3 = v(e'_2))$ est une base de $\operatorname{Ker}(v^2)$ puisque v remplit les conditions du résultat intérmédiaire : v est de rang 2 d'après 1, $v^2 \neq 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$ (car $B \neq 0$) et $\operatorname{Ker} v \neq \operatorname{Ker}(v^2)$. Ainsi, $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

   (c) Pour écrire la matrice de u dans $\mathcal{B}'$, on met en colonne les coordonnées des images des vecteurs de la base $\mathcal{B}'$, exprimés dans la base $\mathcal{B}'$. On sait que $e'_1 \in \operatorname{Ker}(u - 3\operatorname{Id})$ donc $u(e'_1) = 3e'_1$. Par construction, $e'_3 = v(e'_2) = u(e'_2) - 2e'_2$ donc $u(e'_2) = 2e'_2 + e'_3$, et enfin, on sait que $v^2(e'_2) = 0_{\mathbb{R}^3}$ c'est-à-dire $v(e'_3) = 0_{\mathbb{R}^3}$ ce qui donne $u(e'3) = 2e'3$. On trouve donc la matrice suivante

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}'}(u) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Correction de l'exercice 3 Soient a et b strictement positifs. On va effectuer un développement limité quand x tend vers 0 à un ordre assez petit car seule la limite nous intéresse. On a

$$a^x + b^x = e^{x \ln a} + e^{x \ln b} = (1 + x \ln a + o_0(x)) + (1 + x \ln b + o_0(x)) = 2 + x \ln(ab) + o_0(x)$$

Ainsi, on obtient

$$\left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)^{1/x} = \left(1 + \frac{\ln(ab)}{2} x + o_0(x)\right)^{1/x} = e^{\frac{1}{x} \ln\left(1 + \frac{\ln(ab)}{2} x + o_0(x)\right)}.$$

De plus, on a aussi

$$\frac{1}{x} \ln\left(1 + \frac{\ln(ab)}{2} x + o_0(x)\right) = \frac{1}{x}\left(\frac{\ln(ab)}{2} x + o_0(x)\right) = \frac{\ln(ab)}{2} + o_0(1)$$

ce qui donne finalement

$$\left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)^{1/x} = e^{\frac{\ln(ab)}{2} + o_0(1)} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} \sqrt{ab}.$$

Correction de l'exercice 4 Soient a et b deux réels quelconques.

1. Comme $e^{-t} \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} 1$, on a $t^a e^{-t} \sim_{0^+} t^a$. pour l'équivalent du dénominateur, il va falloir distinguer les cas suivant le signe de b. En effet, on sait que

$$t^b \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} \begin{cases} 0 \text{ si } b > 0 \\ 1 \text{ si } b = 0 \\ +\infty \text{ si } b < 0 \end{cases} \qquad \text{donc} \qquad 1 + t^b \underset{t\to 0^+}{\sim} \begin{cases} 1 \text{ si } b > 0 \\ 2 \text{ si } b = 0 \\ t^b \text{ si } b < 0 \end{cases}$$

et enfin

$$\frac{t^a e^{-t}}{1+t^b} \underset{t\to 0^+}{\sim} \begin{cases} t^a \text{ si } b > 0 \\ \frac{t^a}{2} \text{ si } b = 0 \\ t^{a-b} \text{ si } b < 0 \end{cases}$$

2. Comme pour tout $t > 0$, $\dfrac{t^a e^{-t}}{1+t^b} \geq 0$, l'existence de l'intégrale équivaut à l'intégrabilité sur $]0;+\infty[$ de la fonction $f : t \longmapsto \dfrac{t^a e^{-t}}{1+t^b}$.

• Cette fonction est continue sur $]0;+\infty[$ donc intégrable sur tout segment inclus dans $]0;+\infty[$.

• Au voisinage de $+\infty$: on remarque que $t^2 f(t) = \dfrac{t^{a+2}e^{-t}}{1+t^b} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissance comparée. Ainsi, $f(t) = o_{+\infty}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ et la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{t^2}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$, donc f est intégrable au voisinage de $+\infty$.

• Au voisinage de 0 : on utilise l'équivalent trouvé à la question précédente. Distinguons les différents cas :

– si $b > 0$, $f(t) \sim_{0^+} t^a$ et $t \longmapsto t^a = \dfrac{1}{t^{-a}}$ est intégrable au voisinage de 0 si et seulement si $-a < 1$, c'est à dire $a > -1$,

– si $b = 0$, $f(t) \sim_{0^+} \dfrac{t^a}{2}$ et $t \longmapsto \dfrac{t^a}{2} = \dfrac{1}{2t^{-a}}$ est intégrable au voisinage de 0 si et seulement si $a > -1$,

– si $b < 0$, $f(t) \sim_{0^+} t^{a-b} = \dfrac{1}{t^{b-a}}$ et $t \longmapsto \dfrac{1}{t^{b-a}}$ est intégrable au voisinage de 0 si et seulement si $b - a < 1$.

En conclusion, la fonction f est intégrable sur $]0;+\infty[$ si et seulement si ($b \geq 0$ et $a > -1$) ou ($b < 0$ et $b - a < 1$).