Devoir n° 1 — Corrigé de la partie Algèbre

Le corrigé de cette partie comporte de nombreux commentaires en dessous de chaque question, basés sur les erreurs qui ont été fréquemment observées dans les copies. Lisez-les et assurez-vous que vous avez compris ! Si ce n'est pas le cas, posez des questions à un enseignant... Lisez aussi les commentaires généraux suivants, qui pourront vous être utiles pour d'autres devoirs.

— Comme rappelé dans tous les sujets de mathématiques, la rédaction est un élément important que le correcteur prend en compte dans son appréciation de la copie. Pour ce devoir n° 1, cela a été effectivement pris en compte.

— Vous devez accorder de l'importance au soin. Il est arrivé que certaines questions soient tellement raturées ou mal écrites qu'elles m'ont été incompréhensibles, que se soit à cause de l'écriture elle-même ou des ratures qui ont rendu l'ordre de lecture impossible à deviner. Par exemple, dans le calcul de A^2 dans l'exercice 2, aucun point n'a été donné lorsqu'il y avait des coefficients indéchiffrables. Faites donc preuve de maturité et comprenez qu'il est important d'être au minimum lisible. Les brouillons sont là pour ça.

— De façon générale, relisez-vous : vous pouvez par exemple vous relire question après question. Cette phase de relecture doit vous permettre de repérer des fautes d'inattention (utilisation d'une mauvaise lettre, oubli de parenthèses fermantes, etc.) ou de calcul (voir la remarque à ce sujet plus bas).

— N'utilisez pas de symboles mathématiques en guise d'abréviatif dans une phrase écrite en français. Par exemple, on ne veut pas voir des phrases comme : "On obtient une base du Ker de f." Écrivez plutôt : "On obtient une base du noyau de f", ou "On obtient une base de $\operatorname{Ker} f$.

— De façon générale, même quand vous utilisez du symbolisme mathématique, il faut que la phrase telle qu'elle est lue doit avoir du sens en français. Par exemple,

$$\text{Soit } u \in \operatorname{Ker} f \iff \left\{ \begin{array}{rrrcl} x & -y & & = & 0 \\ & y & -z & = & 0 \\ -x & & +z & = & 0 \end{array} \right.$$

n'est pas une phrase correcte puisqu'on la lit : "Soit u appartenant à $\operatorname{Ker} f$ si et seulement si [etc.]". En revanche, on peut écrire :

$$\text{Soit } u \in \mathbb{R}^3. \quad \text{Alors } u \in \operatorname{Ker} f \iff \left\{ \begin{array}{rrrcl} x & -y & & = & 0 \\ & y & -z & = & 0 \\ -x & & +z & = & 0 \end{array} \right.$$

puisqu'on lit quelque chose de correct en français : "Soit u appartenant à $\mathbb{R}^3$. Alors u appartient à $\operatorname{Ker} f$ si et seulement si [etc.]."

— De façon générale, faites attention à l'utilisation des symboles $\Rightarrow$ et $\iff$: ils sont utilisés pour lier entre eux des énoncés mathématiques. Voir les commentaires suivant la correction des questions 2 et 3.

— Vérifiez vos calculs dès que cela est possible. Par exemple, si vous n'êtes pas parvenus à montrer que $A^3 = 0$, alors reprenez calmement le calcul de A^2 ; quand ce dernier calcul vous paraît sans faille, reprenez celui de A^3. Si vous ne trouvez toujours pas ce que vous voulez, alors recommencez en vérifiant que vous n'avez pas mal recopié les donnés de l'énoncé. Autre exemple : si vous pensé avoir trouvé une base $((1,1,0),(0,1,1))$ de $\operatorname{Ker} f$ après avoir résolu un système, alors vérifiez que $f(1,1,0) = 0$ et $f(0,1,1) = 0$.

— Vérifiez enfin la cohérence de ce que vous écrivez. Par exemple,
- écrire "$0 \in f$" n'est pas cohérent puisque f n'est pas un ensemble, donc on ne peut pas dire que quelque chose "appartient à f".
- écrire "$\dim f$" n'est pas cohérent puisque on ne parle que de la dimension d'un espace vectoriel, et pas d'une application linéaire.
- écrire "$\operatorname{Im} f + \operatorname{Ker} f = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$" n'est pas cohérent car le membre de gauche est un ensemble, alors que le membre de droite est une matrice.
- écrire "$\begin{pmatrix} -4 & 3 & 1 \\ -5 & 4 & 2 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 2 & 4 & -5 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$" n'est pas cohérent car les deux matrices ne sont pas égales (elles n'ont pas les mêmes coefficients).

De façon générale, vérifiez que ce qui est à droite et à gauche d'un symbole d'égalité sont des objets de même nature (deux matrices ou deux nombres ou. . .) qui sont vraiment égaux ! Il faut aussi faire ce même genre de vérification pour les symboles de relations, comme "$\in$" par exemple.

Ce travail de vérification de cohérence n'est pas facile ! Il faut s'y entraîner tout le temps (quand on écrit le cours en amphi, quand on travaille en TD ou chez soi) pour que cela devienne un réflexe. Bien sûr, il y a certaines vérifications qui sont beaucoup plus faciles que d'autres, et d'autres qui sont difficiles au début, et qui deviennent plus naturelles avec l'habitude. Mais ce travail permet de s'assurer qu'on a compris la nature des objets qu'on manipule, leurs articulations, etc.

Exercice 1

1. Soient $X, X' \in \mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. En posant $X = (x, y, z)$ et $X' = (x', y', z')$, on a

$$\begin{aligned} f(\lambda X + X') &= f(\lambda x + x', \lambda y + y', \lambda z + z') \\ &= ((\lambda x + x') - (\lambda y + y'), (\lambda y + y') - (\lambda z + z'), (\lambda z + z') - (\lambda x + x')) \\ &= (\lambda(x - y) + (x' - y'), \lambda(y - z) + (y' - z'), \lambda(z - x) + (z' - x')) \\ &= \lambda(x - y, y - z, z - x) + (x' - y', y' - z', z' - x') \\ &= \lambda f(X) + f(X') \end{aligned}$$

Par conséquent, $\boxed{f \text{ est une application linéaire.}}$

Commentaire

Pour montrer qu'une application f est linéaire, il n'est pas nécessaire de montrer que $f(0) = 0$. Cette égalité est en fait une conséquence de la proposition qu'on a montrée :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall (X, X') \in \mathbb{R}^3,\ f(\lambda X + X') = \lambda f(X) + f(X').$$

En effet, si on utilise cette proposition en choisissant un X quelconque, puis $X' = X$ et $\lambda = -1$ (et il est légitime de pouvoir faire ces choix, puisque la proposition est quantifiée par des "quels que soient"), on obtient :

$$f(-X + X) = -f(X) + f(X), \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad f(0) = 0.$$

2. Soit $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Alors

$$X \in \operatorname{Ker} f \iff \left\{ \begin{array}{rrrcl} x & -y & & = & 0 \\ & y & -z & = & 0 \\ -x & & +z & = & 0 \end{array} \right. \underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_1}{\iff} \left\{ \begin{array}{rrrcl} x & -y & & = & 0 \\ & y & -z & = & 0 \\ & -y & +z & = & 0 \end{array} \right.$$

Comme les deux dernières équations du deuxième système sont les mêmes, on peut en enlever une, c'est-à-dire que
$$\left\{\begin{array}{cccc} x & -y & & = & 0 \\ & y & -z & = & 0 \\ & -y & +z & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x-y=0 \\ y-z=0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x=y \\ z=y. \end{array}\right.$$
On a donc $X \in \operatorname{Ker} f \iff x=y=z$. Cela montre que $\operatorname{Ker} f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x=y=z\}$, ou encore que $\operatorname{Ker} f = \{(x,x,x) \mid x \in \mathbb{R}\}$. On peut enfin aussi écrire cela sous la forme
$$\boxed{\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}\{(1,1,1)\}.}$$

Commentaire
D'abord, quelques commentaires sur le déroulement de cette preuve et sa rédaction :
1. J'ai commencé par prendre un élément avec lequel je vais travailler et j'introduis mes notations : "Soit $X=(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$."
2. Ensuite, le morceau "$X \in \operatorname{Ker} f$" montre ce que je suis en train de faire : ici, j'essaie d'exprimer le fait que X est un élément du noyau.
3. J'attaque alors le calcul à proprement parler.

Ensuite, en ce qui concerne les symboles $\boxed{\iff}$, rappelons qu'il signifie qu'à chaque fois qu'il est utilisé, ce qui est situé à sa gauche implique ce qui est situé à sa droite, et réciproquement, ce qui est situé à sa droite implique ce qui est situé à sa gauche. *C'est un symbole fort qu'il faut utiliser à bon escient*, et à chaque fois qu'on l'utilise, il faut vérifier (au moins mentalement) que ces aller-retours sont vrais. Pour reprendre la première équivalence de la deuxième ligne de calcul écrite précédemment, il s'agit donc de se demander :
1. Si le système $\left\{\begin{array}{ccccc} x & -y & & = & 0 \\ & y & -z & = & 0 \\ & -y & +z & = & 0 \end{array}\right.$ est vérifié, est-ce que le système $\left\{\begin{array}{l} x-y=0 \\ y-z=0 \end{array}\right.$ est vérifié ?
2. Réciproquement, si le système $\left\{\begin{array}{l} x-y=0 \\ y-z=0 \end{array}\right.$ est vérifié, est-ce que le système $\left\{\begin{array}{ccccc} x & -y & & = & 0 \\ & y & -z & = & 0 \\ & -y & +z & = & 0 \end{array}\right.$ est vérifié ?

Lorsqu'on a réussi à conserver des équivalences tout au long du calcul, on peut en conclure que $\operatorname{Ker} f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x=y=z\}$. En effet, toutes les implications du type $\Rightarrow$ (contenues dans les équivalences) montrent que si $X \in \operatorname{Ker} f$, alors $X \in \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x=y=z\}$; autrement dit, cela montre que $\operatorname{Ker} f \subset \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x=y=z\}$. Réciproquement, les implications du type $\Leftarrow$ montrent que si $X \in \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x=y=z\}$, alors $X \in \operatorname{Ker} f$; autrement dit, cela montre que $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x=y=z\} \subset \operatorname{Ker} f$.
Ainsi, faites attention : si vous n'écrivez que des implications dans votre copie, vous ne montrez en fait que des inclusions, et vous n'avez donc fait que la moitié du boulot !

3. Notons $F=\{(u,v,w) \mid u+v+w=0\}$. Soit $Y=(u,v,w) \in \mathbb{R}^3$. Alors
$$\begin{aligned} U \in \operatorname{Im} f &\iff \exists (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad Y = f(x,y,z) \\ &\iff \exists (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad \left\{\begin{array}{l} u = x-y \\ v = y-z \\ w = z-x. \end{array}\right. \end{aligned}$$
Si on suppose donc que $U \in \operatorname{Im} f$, alors il existe trois réels x, y, z vérifiant le système précédent. Dans ce cas, on a $u+v+w = x-y+y-z+z-x = 0$. On a donc montré que si $U \in \operatorname{Im} f$, alors $U \in F$. Autrement dit, on a montré que $\operatorname{Im} f \subset F$.
Par ailleurs, d'après la question précédente, on a $\dim \operatorname{Ker} f = 1$, de sorte que le théorème du rang donne :
$$3 = 1 + \dim \operatorname{Im} f, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \dim \operatorname{Im} f = 2.$$

Or, d'après le cours, F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ de dimension 2, car c'est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ défini à l'aide d'une équation linéaire non triviale. On a donc $\dim \operatorname{Im} f = \dim F$, et comme on a montré l'inclusion $\operatorname{Im} f \subset F$, on en conclut qu'il y a égalité entre ces deux ensembles, c'est-à-dire que

$$\boxed{\operatorname{Im} f = \{(u,v,w) \mid u+v+w=0\}}$$

> **Commentaire**
> Comme la condition qui est apparue dans la première équivalence avait l'air compliquée (à cause du quantificateur $\exists$), j'ai préféré de pas continuer à travailler par équivalences, mais plutôt par implications, et j'ai ainsi vu que $\operatorname{Im} f \subset F$. Puis, pour remplacer la démonstration de l'inclusion réciproque, j'ai utilisé un argument de dimensions.
> Voyons comment on aurait pu faire en travaillant uniquement par équivalences. Comme il s'agit de se demander s'il existe des x, y, z vérifiant un certain système, j'essaie d'avancer en résolvant ce système en considérant ces lettres comme les inconnues :
>
> $$\begin{aligned} U \in \operatorname{Im} f &\iff \exists (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad \left\{\begin{array}{rrrcl} x & -y & & = & u \\ & y & -z & = & v \\ -x & & +z & = & w \end{array}\right. \\ &\iff \exists (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad \left\{\begin{array}{rrrcl} x & -y & & = & u \\ & y & -z & = & v \\ & -y & +z & = & u+w \end{array}\right. \\ &\iff \exists (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad \left\{\begin{array}{rrrcl} x & -y & & = & u \\ & y & -z & = & v \\ & & -v & = & u+w \end{array}\right. \end{aligned}$$
>
> La dernière équivalence n'est peut-être pas évidente pour vous. Vérifions qu'elle est vraie :
> 1. S'il existe une solution (x,y,z) de l'avant-dernier système, est-ce qu'il en existe aussi une pour le dernier système ?
> 2. Réciproquement, si on a une solution (x,y,z) au dernier système, est-ce aussi une solution de l'avant-dernier ?
>
> Ici, les réponses à ces questions sont toutes les deux "oui" (assurez-vous d'être d'accord avec moi !), donc c'est bon ; on peut continuer. Je prétends qu'on a ensuite l'équivalence suivante :
>
> $$\exists (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad \left\{\begin{array}{rrrcl} x & -y & & = & u \\ & y & -z & = & v \\ & & -v & = & u+w \end{array}\right. \iff u+v+w=0.$$
>
> Là, ce n'est pas évident, en particulier car le membre ne droite ne comporte plus le quantificateur $\exists$ et les lettres x, y, z. Cherchons donc à vérifier cette équivalence.
> 1. Le sens $\Leftrightarrow$ est facile : si on suppose qu'on a une solution (x,y,z) au système, alors l'équation $u+v+w=0$ est vraie, puisqu'il s'agit de la dernière équation du système.
> 2. Réciproquement, si on suppose que $u+v+w=0$, alors est-il vrai qu'il existe (x,y,z) tel que le système soit vérifié ? La dernière équation du système est vraie, donc on doit se demander s'il existe (x,y,z) vérifiant les deux premières. Autrement dit, je me demande s'il existe x, y, z tels que
>
> $$\begin{cases} x = u+y \\ z = y-v. \end{cases}$$
>
> La réponse est oui : je choisis y comme je veux (par exemple, $y=1$), et je définis alors x et z par $x=u+y$ et $z=y-v$. Par construction, le triplet (x,y,z) obtenu est bien une solution du système, et le sens réciproque de l'équivalence est vrai !
>
> J'ai donc montré que
>
> $$(u,v,w) \in \operatorname{Im} f \iff u+v+w=0.$$
>
> Comme j'ai réussi à conserver mon équivalence jusqu'au bout, j'ai donc montré que
>
> $$\operatorname{Im} f = \{(u,v,w) \in \mathbb{R}^3 \mid u+v+w=0\}.$$

4. On peut déjà noter que, comme f est un endomorphisme d'un espace de dimension finie, on sait d'après le

cours que

$$f \text{ est injective} \iff f \text{ est surjective} \iff f \text{ est bjective.}$$

Ici, on a vu en question 2 que $\operatorname{Ker} f \neq \{(0,0,0)\}$, donc f n'est pas injective. Par suite, elle n'est pas non plus surjective ou bijective.

> **Commentaire**
> Prendre garde au fait que les équivalences écrites à l'instant ne sont vraies que lorsque l'espace sur lequel est défini l'endomorphisme est de dimension *finie*. Il faut donc l'indiquer explicitement sur la copie, sous peine de perte de points !

5. Pour montrer que $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$, il suffit de montrer (d'après le cours) que $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{0\}$ et que $\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = \dim \mathbb{R}^3$.

— L'égalité des dimensions est vraie : c'est le théorème du rang.

— Par ailleurs, soit $X \in \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{0\}$. D'après la question 2, comme $X \in \operatorname{Ker} f$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $X = \lambda(1,1,1) = (\lambda, \lambda, \lambda)$. D'après la question 3, comme $X \in \operatorname{Im} f$, on a $\lambda + \lambda + \lambda = 0$. On en déduit que $\lambda = 0$ et donc que $X = 0$. Cela montre que $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f \subset \{0\}$, et comme l'inclusion réciproque est évidente, on a bien $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{0\}$.

Finalement, on a $\boxed{\operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3}$.

> **Commentaire**
> Rappelons que si F et G sont deux sous-espaces vectoriels d'un espace E, alors la définition de "F et G sont supplémentaires dans E" est que
>
> $$(*) \quad \begin{cases} F \cap G = \{0\} \\ F + G = E \end{cases}$$
>
> Ainsi, pour démontrer que deux sous-espaces sont supplémentaires, on peut tout à fait essayer de montrer chacune de ces deux égalités d'ensembles. Souvent, l'inclusion $E \subset F+G$ est un peu difficile et on ne sait pas trop comment la démontrer (je rappelle d'ailleurs que cette inclusion revient exactement à dire que pour tout $x \in E$, il existe $(y,z) \in F \times G$ tel que $x = y + z$).
> Un moyen pour contourner le problème est de remplacer les conditions $(*)$ par les conditions
>
> $$(*') \quad \begin{cases} F \cap G = \{0\} \\ \dim F + \dim G = \dim E \end{cases}$$
>
> En effet, ces deux conditions, vérifiées *ensemble*, impliquent les conditions $(*)$, et donc que F et G sont supplémentaires dans E.
> Mais attention : l'égalité $\dim F + \dim G = \dim E$ à elle seule n'implique pas que $F + G = E$. Pour voir un contre-exemple, considérons $E = \mathbb{R}^3$, $F = \operatorname{Vect}\{(1,1,0),(0,-1,0)\}$ et $G = \operatorname{Vect}\{(1,0,0)\}$. On a bien $\dim F + \dim G = 2 + 1 = \dim E$, mais pourtant $F + G = \operatorname{Vect}\{(1,1,0),(0,-1,0),(1,0,0)\} = \operatorname{Vect}\{(1,1,0),(0,-1,0)\}$ car $(1,0,0)$ est combinaison linéaire de $(1,1,0)$ et $(0,-1,0)$, et donc $F+G \neq E$.
> C'est bien la conjonction des deux conditions $(*')$ qui permet de démontrer que $F + G = E$, et donc que $F \oplus G = E$ (voir la démonstration dans le cours ; elle utilise la formule de Grassmann).
> On peut enfin remarque qu'on peut aussi remplacer les conditions $(*)$ par les suivantes :
>
> $$(*'') \quad \begin{cases} F + G = E \\ \dim F + \dim G = \dim E, \end{cases}$$
>
> mais c'est beaucoup plus rare de passer par là...

Exercice 2

1. Mettons A sous forme échelonnée :

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 1 \\ -5 & 4 & 2 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \underset{C_3 \leftrightarrow C_1}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 2 & 4 & -5 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \underset{\substack{C_2 \leftarrow C_2 - 3C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 + 4C_1}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 3 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \underset{C_3 \leftarrow C_3 + \frac{3}{2}C_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Cette forme échelonnée montre que $\boxed{\mathrm{rg}(A) = 2}$.

> **Commentaire**
> Dans certaines copies, des erreurs ont été faites et ont conduit à conclure que $\mathrm{rg}(A) = 3$. Il faut essayer de réfléchir à la crédibilité de ce résultat. En fait, si le rang de A est égal à 3, il est maximal : c'est quelque chose de fort, et cela invite à y réfléchir. Dire que le rang d'une matrice carrée est maximal revient à dire qu'elle est inversible. Or ici c'est impossible : on va montrer que $A^3 = 0$, et cela n'est pas possible pour une matrice inversible (en effet, si on a $A^3 = 0$, alors $\det(A)^3 = 0$, donc $\det A = 0$ et A n'est donc pas inversible).

2. On effectue les calculs :

$$A^2 = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 1 \\ -5 & 4 & 2 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 3 & 1 \\ -5 & 4 & 2 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 6 & -3 & 3 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

puis

$$A^3 = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 1 \\ -5 & 4 & 2 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 6 & -3 & 3 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

> **Commentaire**
> Remarque : si vous ne trouvez pas la matrice nulle pour A^3, recommencez pas à pas vos calculs pour A^2, mais n'essayez pas de feinter. En particulier, écrire que $A^3 = 0$ alors que votre résultat pour A^2 est faux n'aide pas le correcteur à vous faire confiance !

3. Montrons que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

— Le fait que $E \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est clair, puisque les éléments de E sont bien des matrices carrées de taille 3.

— $0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})} \in E$ car on peut écrire $0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})} = 0 \cdot I_3 + 0 \cdot A + 0 \cdot A^2$.

— Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $M, M' \in E$. Montrons que $\lambda M + M' \in E$. Par hypothèse, il existe $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et $(x', y', z') \in \mathbb{R}^3$ tels que

$$M = xI_3 + yA + zA^2 \qquad \text{et} \qquad M' = x'I_3 + y'A + z'A^2.$$

Ainsi, on a

$$\begin{aligned} \lambda M + M' &= \lambda(xI_3 + yA + zA^2) + (x'I_3 + y'A + z'A^2) \\ &= (\lambda x + x')I_3 + (\lambda y + y')A + (\lambda z + z')A^2. \end{aligned}$$

Comme les coefficients $\lambda x + x'$, $\lambda y + y'$ et $\lambda z + z'$ sont des réels, la dernière égalité montre que $\lambda M + M'$ est un élément de E.

En conclusion, on a montré que $\boxed{E \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).}$

Commentaire
Plusieurs remarques sont à faire sur cette question.
(a) L'écriture $E = \{xI_3 + yA + zA^2 \mid (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\}$ se lit "E est (égal à) l'ensemble des matrices $xI_3 + yA + zA^2$ avec (x, y, z) parcourant $\mathbb{R}^3$." Cela signifie que les lettres x, y, z désignent des nombres réels qui servent à décrire les éléments de E, qui eux sont des matrices. Mais (x, y, z) ne sont PAS les éléments de E ; en particulier, n'écrivez pas des choses du type : "Soit $u = (x, y, z) \in E$".
À LA LIMITE, on pourrait identifier les éléments de E avec les triplets (x, y, z) qui les décrivent, mais cela nécessiterait au préalable de s'assurer que tout élément de E s'écrit de manière *unique* sous la forme $xI_3 + yA + zA^2$. En fait, cela revient à démontrer que la famille (I_3, A, A^2) est une base de E, ce que l'on fait dans la suite de l'exercice.

(b) Il faut faire attention à présenter les arguments dans le bon sens. Voici un exemple que j'ai trouvé dans un grand nombre de copies : "On considère $M = xI_3 + yA + zA^2$ et $M' = x'I_3 + y'A + z'A^2$. Alors

$$\begin{aligned}\lambda M + M' &= (\lambda x + x')I_3 + (\lambda y + y')A + (\lambda z + z')A^2 \\ &= \lambda(\underbrace{xI_3 + yA + zA^2}_{\in E}) + (\underbrace{x'I_3 + y'A + z'A^2}_{\in E})\end{aligned}$$

donc $\lambda M + M' \in E$."
Cette présentation n'est pas correcte. L'argument tel qu'il est présenté ici est que, parce que $xI_3 + yA + zA^2$ et $x'I_3 + y'A + z'A^2$ sont des éléments de E, alors leur combinaison linéaire est aussi un élément de E. C'est faux car rien ne nous permet d'affirmer cela *a priori*. Au contraire, cette propriété est exactement celle que l'on veut montrer, à savoir que E est stable par combinaison linéaire. Autrement dit, cette argumentation est fausse car elle utilise comme hypothèse la conclusion qui est recherchée.
Nous voulons montrer que $\lambda M + M'$ est une élément de E. Vu la définition de E, cela signifie qu'il faut réussir à écrire cette matrice sous la forme $x''I_3 + y''A + z''A^2$, où x'', y'' et z'' sont des réels qu'il faut déterminer. Il s'agit donc plutôt d'écrire quelque chose comme

$$\begin{aligned}\lambda M + M' &= \lambda(xI_3 + yA + zA^2) + (x'I_3 + y'A + z'A^2) \\ &= (\underbrace{\lambda x + x'}_{\in\mathbb{R}})I_3 + (\underbrace{\lambda y + y'}_{\in\mathbb{R}})A + (\underbrace{\lambda z + z'}_{\in\mathbb{R}})A^2.\end{aligned}$$

C'est donc bien la deuxième égalité qui est importante, parce qu'elle met en évidence l'écriture de $\lambda M + M'$ sous la forme $x''I_3 + y''A + z''A^2$.

(c) Une variante consiste à travailler avec l'application

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \\ (x, y, z) & \longmapsto & xI_3 + yA + A^2 \end{array} \right.$$

Il s'agit alors de constater que $E = \varphi(\mathbb{R}^3)$, par définition de E. Par suite, si on montre que φ est une application linéaire, alors $E = \operatorname{Im}\varphi$ sera un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ (c'est un théorème du cours que toute image d'application linéaire est un sous-espace vectoriel de l'espace d'arrivée).
Cette façon de procéder est tout à fait correcte, à condition de bien la rédiger ! En particulier, il faut définir clairement φ sur votre copie, expliciter son lien avec E et montrer qu'elle est linéaire (dans les faits, cela ne va pas beaucoup plus vite que de montrer que E est un sous-espace vectoriel). Enfin, n'utilisez pas des notations-fantaisie comme "$E(\lambda u + v)$" : E n'est pas une application, donc cette écriture n'a pas de sens !

(d) Une autre variante consiste à dire remarquer que, par définition, on a $E = \operatorname{Vect}\{I_3, A, A_2\}$. Ainsi, à l'instar de tout sous-espace engendré par une partie de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Retour à la question de l'énoncé. Il s'agit maintenant de trouver une base de E. Déjà, on a $E = \operatorname{Vect}\{I_3, A, A^2\}$, ce qui signifie que (I_3, A, A^2) est une famille génératrice de E.
Montrons qu'elle est libre : soit $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ tels que $\lambda_0 I_3 + \lambda_1 A + \lambda_2 A^2 = 0 \quad (*)$. Montrons que $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = 0$.
En multipliant l'égalité $(*)$ par A, on obtient

$$\lambda_0 A + \lambda_1 A^2 + \lambda A^3 = 0,$$

c'est-à-dire, vu que $A^3 = 0$,

$$\lambda_0 A + \lambda_1 A^2 = 0. \qquad (*')$$

En multipliant cette dernière égalité par A, on obtient de même

$$\lambda_0 A^2 = 0.$$

Comme $A^2 \neq 0$ (cf. question 2), on en déduit que $\lambda_0 = 0$. Par suite, en reportant dans l'égalité $(*')$, il vient $\lambda_1 A^2 = 0$, d'où $\lambda_1 = 0$. Enfin, l'égalité $(*)$ devient alors $\lambda_2 A^2 = 0$ et on en déduit que $\lambda_2 = 0$. Cela montre donc que la famille (I_3, A, A^2) est libre.
Finalement, on a montré que $\boxed{\text{la famille } (I_3, A, A^2) \text{ est une base de } E}$.

4.a) Montrer que Φ est un endomorphisme de E signifie que Φ est une application linéaire et que $\Phi(E) \subset E$, c'est–à-dire que pour tout $M \in E$, on a $\Phi(M) \in E$.

— Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ ainsi que $M, M' \in E$. Alors

$$\Phi(\lambda M + M') = B(\lambda M + M') = \lambda BM + BM' = \lambda \Phi(M) + \Phi(M'),$$

ce qui montre que Φ est linéaire.

— Soit $M \in E$: il existe $(x, y, z) \in \mathbb{R}$ tel que $M = xI_3 + yA + zA^2$. On a alors

$$\begin{aligned}\Phi(M) = BM &= (\alpha I_3 + \beta A + \gamma A2)(xI_3 + yA + zA^2) \\ &= \alpha x I_3 + \alpha y A + \alpha z A^2 + \beta x A + \beta y A^2 + \beta z \underbrace{A^3}_{=0} + \gamma x A^2 + \gamma y \underbrace{A^3}_{=0} + \gamma z \underbrace{A^4}_{=0} \\ &= \alpha x I_3 + (\alpha y + \beta x)A + (\alpha z + \beta y + \gamma x)A^2.\end{aligned}$$

Comme αx, $\alpha y + \beta x$ et $\alpha z + \beta y + \gamma x$ sont des nombres réels, cette écriture montre que $\Phi(M) \in E$.

En conclusion, $\boxed{\Phi \text{ est un endomorphisme de } E}$.

> **Commentaire**
> Attention, ce n'est pas parce que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qu'il est forcément stable par multiplication des matrices. Autrement dit, le fait que $B \in E$, que $M \in E$ et que E soit un sous-espace vectoriel n'implique pas nécessairement que $BM \in E$.
> Par exemple, l'ensemble des matrices symétriques est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, mais si on prend les matrices
> $$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$
> alors on a
> $$BM = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
> qui n'est pas une matrice symétrique.

4.b) Pour trouver la matrice de Φ dans la base (I_3, A, A^2), nous devons trouver les écritures de $\Phi(I_3)$, $\Phi(A)$ et $\Phi(A^2)$ dans cette base. Or, compte tenu du fait que $A^3 = 0$, on a :

$$\begin{aligned}\Phi(I_3) &= B = \alpha I_3 + \beta A + \gamma A^2 \\ \Phi(A) &= BA = \alpha A + \beta A^2 + \gamma A^3 = \alpha A + \beta A^2 \\ \Phi(A^2) &= BA^2 = \alpha A^2 + \beta A^3 + \gamma A^4 = \alpha A^2.\end{aligned}$$

Par conséquent, on a

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{(I_3,A,A^2)}(\Phi) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ \beta & \alpha & 0 \\ \gamma & \beta & \alpha \end{pmatrix}.}$$