Université Claude Bernard - Lyon 1 — Semestre d'automne 2016-2017

Mathématiques III PMI — 26 septembre 2016. Durée : 1 h 30

Devoir n° 1

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre. Dans toutes les questions, il sera tenu le plus grand compte de la rigueur de la rédaction ; **toute réponse insuffisamment justifiée sera considérée comme nulle.**

Les exercices sont indépendants.

Partie Algèbre

Exercice 1. Soit f l'application définie par $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x-y, y-z, z-x) \end{array} \right.$.

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Déterminer le noyau de f.
3. Montrer que $\operatorname{Im} f = \{(u,v,w) \in \mathbb{R}^3 \mid u+v+w=0\}$.
4. L'application f est-elle injective ? surjective ? bijective ?
5. Montrer que $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 2. Considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 1 \\ -5 & 4 & 2 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer le rang de A.
2. Calculer A^2 puis vérifier que $A^3 = 0$.
3. Soit $E = \{xI_3 + yA + zA^2 \mid (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\}$. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et en déterminer une base.
4. Soient α, β et γ des réels. On note $B = \alpha I_3 + \beta A + \gamma A^2$ et on considère l'application Φ définie sur E par $\Phi(M) = BM$.
   (a) Montrer que Φ est un endomorphisme de E.
   (b) Déterminer la matrice de Φ dans la base (I_3, A, A^2).

(Tournez s'il vous plaît.)

Partie Analyse

Exercice 3.

1. Déterminer la nature de l'intégrale impropre
$$\int_0^{+\infty} \frac{1+\sin t}{(t+1)\sqrt[3]{t^2}}\mathrm{d}t.$$

2. (a) Donner le développement limité à l'ordre 2 en 0 de la fonction
$$f(x) = \sqrt{1+3x+2x^2} - 1;$$

   (b) Calculer
$$\lim_{X\to+\infty} \sqrt{X^2+3X+2} - X;$$

   (c) Déterminer la nature de l'intégrale impropre
$$\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{y^2+3y+2} - y}{y\ln(2+y^3)}\mathrm{d}y.$$

Exercice 4.

1. Déterminer la nature de l'intégrale :
$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos u}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u.$$
en utilisant une intégration par partie.

2. On veut déterminer si la fonction définie par
$$\forall x \in [1, +\infty[, \quad g(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{x}}$$
est intégrable.

   (a) Montrer que $|\cos t| \geq \cos^2 t$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

   (b) Déterminer si l'intégrale suivante est convergente :
$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t.$$

   (c) Montrer que la fonction g n'est pas intégrable sur $[1, +\infty[$.