Université Claude Bernard - Lyon 1 — Semestre de printemps 2017-2018

Math IV - Cursus préparatoire 2A — Durée : 1 heure et 30 minutes

---

Partie commune - Devoir numéro 1

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Dans toutes les questions, il sera tenu le plus grand compte de la rigueur de la rédaction ; ***toute réponse insuffisamment justifiée sera considérée comme nulle****.*

Tous les exercices sont indépendants.

Partie ANALYSE

Exercice 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f_n :]0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\forall x > 0, \quad f_n(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{1+nx}}.$$

1. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge simplement sur $]0;+\infty[$.
2. Montrer qu'il n'existe aucune partie A non vide de $]0;+\infty[$ sur laquelle $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge normalement.
3. Soit $a > 0$. Montrer que $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge uniformément sur $[a;+\infty[$.
4. On note $S = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ la fonction somme de cette série de fonctions. Déterminer, si elle existe, la limite de $S(x)$ lorsque $x \to +\infty$.

Exercice 2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction $g_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g_n(x) = 2xe^{-(2n+1)x}.$$

On donne pour cet exercice la valeur de la somme suivante : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

1. (a) Déterminer le domaine de convergence simple, noté D, de la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}} g_n$.

   (b) En faisant apparaître une série géométrique, déterminer la valeur de la somme $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} g_n(x)$ pour tout $x \in D$.
2. À l'aide d'une interversion série/intégrale à justifier, déterminer la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{\mathrm{sh}(x)}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 3. Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace préhilbertien réel (de dimension quelconque). Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier non nul. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une famille de vecteurs unitaires telle que pour tout $x \in E$ on ait

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle^2.$$

On note F le sous-espace vectoriel de E engendré par la famille $\mathcal{B}$.

1. Montrer que la famille $\mathcal{B}$ est orthogonale.
2. Soit $x \in E$ un vecteur quelconque et soit
$$y = x - \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i.$$
Montrer que $y \in F^{\perp}$.
3. Montrer que $F^{\perp} = \{0\}$.
4. Déduire des questions précédentes que $\mathcal{B}$ est une base orthonormée de E.

Exercice 4. Soit $E = \mathcal{C}^2([0,1], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions réelles sur $[0,1]$ de classe $\mathcal{C}^2$. Soit $F = \{f \in E \mid f(0) = f(1) = 0\}$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.
2. Soit $\varphi : F \times F \to \mathbb{R}$ définie par
$$\varphi(f,g) = -\int_0^1 (f(x)g''(x) + f''(x)g(x))dx.$$
Montrer que φ est un produit scalaire sur F.

Exercice 5. Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique, soient $v_1 = (1,1,0)$, $v_2 = (1,0,1)$ et $F = \text{Vect}\{v_1, v_2\}$. Soit $u = (-1,2,3)$.

1. Déterminer une base orthonormée de $F^{\perp}$.
2. Déterminer le projeté orthogonal de u sur F.

Correction de la partie analyse du Devoir Surveillé 1 - partie commune

Correction de l'exercice 1

1. Soit $x > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(-1)^n f_n(x) \geq 0$ donc la série $\sum f_n(x)$ est alternée. De plus, la suite $(|f_n(x)|)_{n\geq 1} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{1+nx}}\right)_{n\geq 1}$ est décroissante (car $1+nx \leq 1+(n+1)x$ puisque $x>0$ et $\sqrt{\ }$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$), et converge vers 0 puisque $nx \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ (car $x>0$). D'après le critère spécial des séries alternées, la série $\sum f_n(x)$ converge. Ainsi, la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $]0;+\infty[$.
2. Supposons qu'il existe une partie A non vide de $]0;+\infty[$ sur laquelle $\sum f_n$ converge normalement, alors en particulier, elles converge aussi absolument simplement sur A. Il existe donc $x_0 \in A$, $x_0 > 0$ (possible car $A \neq \emptyset$) tel que la série $\sum |f_n(x_0)|$ converge. Or on a
$$|f_n(x_0)| = \frac{1}{\sqrt{1+nx_0}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{x_0}}\frac{1}{\sqrt{n}}$$
et la série $\sum \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ diverge par Riemann. Par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum |f_n(x_0)|$ diverge, ce qui est contradictoire. Il n'existe donc aucune partie non vide de $]0;+\infty[$ sur laquelle $\sum f_n$ converge normalement.
3. On a vu que la série $\sum f_n$ converge simplement et que pour tout $x \geq a$, la série $\sum f_n(x)$ vérifie le critère des séries alternées. Par conséquent, si l'on note $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k$, on a pour tout $n \geq 1$:
$$|R_n(x)| \leq |f_{n+1}(x)| = \frac{1}{\sqrt{1+(n+1)x}} \leq \frac{1}{\sqrt{1+(n+1)a}} \quad \forall x \in [a;+\infty[.$$
Par conséquent, la fonction R_n est bornée sur $[a;+\infty[$ et l'on a
$$0 \leq \|R_n\|_{\infty;[a;+\infty[} = \sup_{x\in[a;+\infty[} |R_n(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{1+(n+1)a}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$
ce qui démontre que la suite de fonctions $(R_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $[a;+\infty[$. Ainsi, $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a;+\infty[$.
4. On peut par exemple utiliser le théorème de la double limite :
   - L'ensemble $[1;+\infty[$ n'est pas majoré.
   - Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
   - La série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur $[1;+\infty[$.

   Par le théorème de la double limite, la fonction somme S admet une limite lorsque $x \to +\infty$ et
$$\lim_{x\to+\infty} S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x\to+\infty} f_n(x) = 0.$$

Correction de l'exercice 2

1. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Si $x<0$, alors $g_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$ donc la série $\sum g_n(x)$ diverge grossièrement. Si $x=0$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g_n(x) = 0$ donc la série $\sum g_n(x)$ converge : la suite de ses sommes partielles est constante égale à 0 donc converge vers 0. Si $x>0$, on peut écrire $g_n(x) = 2xe^{-x}(e^{-2x})^n$. Or la série géométrique $\sum (e^{-2x})^n$ converge puisque sa raison e^{-2x} vérifie $\left|e^{-2x}\right| < 1$ car $x>0$. Ainsi, la série $\sum g_n(x)$ converge. Finalement, le domaine de convergence simple de la série de fonctions $\sum g_n$ est $D = \mathbb{R}^+$.

(b) On vient de voir ci dessus que $S(0) = 0$. Soit $x > 0$, alors par sommation géométrique

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} 2xe^{-x}(e^{-2x})^n = 2xe^{-x}\frac{1}{1-e^{-2x}} = \frac{2x}{e^x - e^{-x}} = \frac{x}{\text{sh}(x)}.$$

2. On va chercher à appliquer le théorème d'intégration terme à terme.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction g_n est continue donc continue par morceaux sur $\mathbb{R}^+$, elle est de plus intégrable sur tout segment de la forme $[0;a]$ pour tout $a > 0$. De plus, par croissances comparées (car $2n+1 \geq 1$), on a $x^2 g_n(x) = 2x^3 e^{-(2n+1)x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ ce qui entraîne $g_n(x) = \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)$. La fonction $x \longmapsto \frac{1}{x^2}$ étant intégrable sur $[a;+\infty[$ par Riemann, par comparaison de fonctions positives, il en est de même de g_n. Ainsi, g_n est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ donc sur $]0;+\infty[$.
- Par les questions précédentes, on a vu que la série de fonctions $\sum g_n$ converge simplement sur $]0;+\infty[$ vers la fonction $S : x \longmapsto \frac{x}{\text{sh}(x)}$ qui est continue, donc continue par morceaux sur $]0;+\infty[$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$, par intégration par parties généralisées avec les fonctions $u : x \longmapsto 2x$ et $v : x \longmapsto -\frac{e^{-(2n+1)x}}{2n+1}$ qui sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0;+\infty[$ (celle-ci étant bien justifiée car tous les termes ci-dessous convergent) :

$$\int_0^{+\infty} |g_n(x)|\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{2xe^{-(2n+1)x}}{2n+1}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty}\frac{2e^{-(2n+1)x}}{2n+1}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{2e^{-(2n+1)x}}{(2n+1)^2}\right]_0^{+\infty} = \frac{2}{(2n+1)^2}$$

  Par ailleurs, $\frac{2}{(2n+1)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$. La série $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente par Riemann, donc par comparaison de séries à termes positifs, il en est de même de $\sum \int_0^{+\infty} |g_n(x)|\,\mathrm{d}x$.

On peut donc appliquer le théorème d'intégration terme à terme : la fonction S est intégrable sur $]0;+\infty[$, ce qui justifie la convergence de l'intégrale considérée, et on peut intervertir série et intégrale, ce qui donne

$$\int_0^{+\infty}\frac{x}{\text{sh}(x)}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} g_n(x)\right)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty} g_n(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{4}$$

grâce au calcul ci-dessus.