Inégalité de Hölder discrete

Exercice 13

1. Soit I un intervalle et $f : I \to R$ continue, et dérivable sur l'intérieur de I. Montrer que si f est croissante, alors $\forall x, y \in I$, $\forall t \in [0,1]$,
$$f(tx+(1-t)y) \leq tf(x)+(1-t)f(y).$$
On dit alors que f est convexe.
2. Montrer que pour tout $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ et $t \in [0,1]$, on a
$$\ln(tx+(1-t)y) \geq t\ln(x)+(1-t)\ln(y).$$
3. Soit $(p,q) \in [1,+\infty[^2$ 2 tel que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.
   (a) Montrer que pour tout $a, b \in \mathbb{R}^+$, on a
   $$ab \leq \frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}.$$
   (b) En déduire que pour tout $a, b \in \mathbb{R}^+$ et $\lambda > 0$, on a
   $$ab \leq \lambda^p\frac{a^p}{p}+\lambda^{-q}\frac{b^q}{q}.$$
   (c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $(a_1, ..., a_n), (b_1, ..., b_n) \in (\mathbb{R}^+)^n$, on a
   $$\sum_{i=1}^{n}|a_ib_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^{n}|b_i|^q\right)^{1/q}.$$

Correction. 1. Soit $y \in I$ et $t \in [0,1]$. On définit la fonction g sur I tel que pour tout $x \in I$,
$$g(x) = f(tx+(1-t)y) - tf(x)+(1-t)f(y).$$
Montrons que pour tout $x \in I$, $g(x) \leq g(y)$, ce qui implique l'inégalité demandée.
g est dérivable sur l'intérieur de I comme composée de fonctions dérivables, et pour tout $x \in I$,
$$g'(x) = t\left(f'(tx+(1-t)y) - f'(x)\right).$$
On a $g(y) = 0$ et pour tout $x \in I$:
$$\begin{aligned} x \leq y &\Rightarrow tx+(1-t)y \geq x \\ &\Rightarrow f'(tx+(1-t)y) \geq f'(x) \text{ car } f' \text{ est croissante} \\ &\Rightarrow g'(x) \geq 0. \end{aligned}$$
De même
$$\begin{aligned} x \geq y &\Rightarrow tx+(1-t)y \leq x \\ &\Rightarrow f'(tx+(1-t)y) \leq f'(x) \text{ car } f' \text{ est croissante} \\ &\Rightarrow g'(x) \leq 0. \end{aligned}$$
En faisant le tableau de variation de g, cela montre que $g(y)$ est le maximum de g sur I, c'est à dire que $\forall x \in I,\ g(x) \leq g(y)$. Le résultat s'en suit.

2. Soit $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ et $t \in [0,1]$. La fonction exp, définie sur $\mathbb{R}$, est convexe d'après la question précédente. On applique alors l'inégalité de convexité à $a = \ln x$ et $b = \ln y$, obtenant:
$$e^{t\ln x+(1-t)\ln y} \leq te^{\ln x} + (1-t)e^{\ln y},$$
c'est à dire:
$$x^t y^{1-t} \leq tx + (1-t)y.$$
On applique alors la fonction ln qui est croissante à l'inégalité précédente, obtenant l'inégalité demandée.

3. (a) Soit $a, b \in \mathbb{R}^+$. On applique l'inégalité précédente à $t = \frac{1}{p}$, $x = a^p$ et $y = b^q$, obtenant
$$\ln(\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}a^q) \geq \frac{1}{p}\ln(a^p) + \frac{1}{q}\ln(b^q),$$
ce qui se simplifie en
$$\ln(\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}a^q) \geq \ln a + \ln b.$$
On applique alors la fonction exp qui est croissante, obtenant l'inégalité voulue.

   (b) Il suffit de prendre $a' = \lambda a$ et $b' = \frac{b}{\lambda}$ dans l'inégalité précédente.

   (c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_1, ..., a_n), (b_1, ..., b_n) \in (\mathbb{R}^+)^n$. D'après la question précédente, on a pour tout $\lambda > 0$:
$$\sum_{i=1}^n |a_i b_i| \leq \frac{\lambda^p}{p}\sum_{i=1}^n |a_i|^p + \frac{\lambda^{-q}}{q}\sum_{i=1}^n |b_i|^q.$$
On pose $A = (\sum_{i=1}^n |a_i|^p)^{1/p}$ et $B = (\sum_{i=1}^n |b_i|^q)^{1/q}$. L'inégalité précédente se réécrit:
$$\sum_{i=1}^n |a_i b_i| \leq \frac{\lambda^p}{p}A^p + \frac{\lambda^{-q}}{q}B^q.$$
On cherche alors λ tel quel
$$\frac{\lambda^p}{p}A^p + \frac{\lambda^{-q}}{q}B^q = AB.$$
Comme $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, on peut tenter de trouver λ tel que $\lambda^p A^p = AB$ et $\lambda^q B^q = AB$. On trouve
$$\lambda = \frac{B^{1/p}}{A^{1/q}}.$$
On vérifie ensuite qu'un tel λ donne bien le résultat.

□