Exercice 13

1. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on montre par récurrence (finie) sur $p \in [\![0; n]\!]$ la propriété $\mathcal{P}(p)$:

$$\boxed{A_n^p = n \times (n-1) \times \cdots \times (n-p+1) = \prod_{i=1}^{p} (n-i+p).}$$

— La propriété $\mathcal{P}(0)$ est vraie. En effet, il existe une unique façon de choisir 0 élément dans un ensemble à n éléments (on prend l'ensemble vide uniquement). D'où $A_n^0 = 1$.

— On suppose maintenant la propriété $\mathcal{P}(p)$ vérifiée ($p \in [\![0; n-1]\!]$), montrons la propriété $\mathcal{P}(p+1)$.
On commence par choisir p éléments dans l'ensemble E à n éléments, il y a donc A_n^p façons de faire cela. On a alors retiré p éléments à l'ensemble E auquel il reste donc $n-p$ éléments. Il ne reste plus qu'à choisir l'un de ces éléments, il y a alors $(n-p)$ choix. Ainsi, $A_n^{p+1} = A_n^p \times (n-p)$. Or, par hypothèse de récurrence, $A_n^p = A_n^p = n \times (n-1) \times \cdots \times (n-p+1)$, donc

$$A_n^{p+1} = n \times (n-1) \times \cdots \times (n-p).$$

D'où la propriété $\mathcal{P}(p+1)$ est vraie.

On a ainsi montré que $\mathcal{P}(0)$ était vraie et que $\mathcal{P}(k) \Rightarrow \mathcal{P}(k+1)$ pour tout $k \in [\![0; n-1]\!]$, ce qui montre le résultat voulu par principe de récurrence.

(b) D'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$A_n^n = n \times (n-1) \times \cdots \times (n-n+1) = n!.$$

(c) On observe, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et pour $p \in [\![0; n]\!]$,

$$\frac{n!}{(n-p)!} = \frac{n \times (n-1) \times \dots (n-p+1) \times (n-p) \times \cdots \times 1}{(n-p) \times (n-p-1) \times \cdots \times 1} = n \times (n-1) \times \cdots \times (n-p+1) = A_n^p.$$

D'où l'égalité demandée.

<u>*Interprétation combinatoire*</u> : On remarque que choisir les n éléments d'un ensemble à n éléments (c'est à dire, tous les prendre dans un certain ordre) revient à choisir p éléments dans un certain ordre, puis choisir les $(n-p)$ suivants dans un certain ordre. Ainsi, on en déduit que $A_n^n = A_n^p \times A_n^{n-p}$, i.e.

$$A_n^p = \frac{A_n^n}{A_n^{n-p}} = \frac{n!}{(n-p)!}.$$

Enfin, on retrouve $A_n^0 = \frac{n!}{(n-0)!} = 1$.

(d) Si on choisit une partie non ordonnée de p éléments parmi n, il y a par définition $\binom{n}{p}$ façons de faire (quoique vaille ce nombre). Puis pour ordonner cette partie, il faut les choisir un à un dans un certain ordre, il y a donc $A_p^p = p!$ façons de faire (d'après la question 1.(b)). Ainsi, il y a $p!$ fois plus d'arrangements de p éléments de E que de combinaisons de p éléments de E. D'où

$$\binom{n}{p} = \frac{A_n^p}{A_p^p}.$$

On a alors $\binom{n}{0} = \dfrac{n!}{0!(n-0)!} = 1$ et $\binom{0}{0} = \dfrac{0!}{0!(0-0)!} = 1.$

2. (a) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [\![0; n]\!]$. On calcule, à l'aide de la question 1.(d) :

$$\binom{n}{n-p} = \frac{n!}{(n-p)!(n-(n-p))!} = \frac{n!}{(n-p)!p!} = \binom{n}{p}.$$

(b) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [\![0; n-1]\!]$.

$$\begin{aligned}
\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} &= \frac{(n-1)!}{((n-1)-(p-1))!(p-1)!} + \frac{(n-1)!}{((n-1)-p)!p!} \\
&= \frac{(n-1)!}{(n-p)!(p-1)!} + \frac{(n-1)!}{(n-1-p)!p!} \\
&= \frac{(n-1)!p}{(n-p)!p!} + \frac{(n-1)!(n-p)}{(n-p)!p!} \\
&= \frac{(n-1)!p + (n-1)!(n-p)}{(n-p)!p!} \\
&= \frac{(n-1)!(p+n-p)}{(n-p)!p!} \\
&= \frac{(n)!}{(n-p)!p!} = \binom{n}{p}
\end{aligned}$$

3. (a) Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^2$. On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathcal{P}(n)$:

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.}$$

— La propriété $\mathcal{P}(0)$ est vraie. En effet, $(a+b)^0 = 1$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} a^k b^{0-k} = 1 \times a^0 \times b^0 = 1.$

— On suppose maintenant la propriété $\mathcal{P}(n)$ vraie ($n \in \mathbb{N}$). On a alors,

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b) \times (a+b)^n \\
&= (a+b) \times \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \quad \text{par hypothèse de récurrence } \mathcal{P}(n) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1}
\end{aligned}$$

On effectue un changement d'indice $l = k+1$ dans la première somme

$$= \sum_{l=1}^{n+1} \binom{n}{l-1} a^l b^{n-l+1} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1}$$

On effectue un changement d'indice $k = l$ dans la première somme

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^k b^{n-k+1} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} \\
&= \binom{n}{n} a^{n+1} b^0 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^k b^{n-k+1} + \binom{n}{0} a^0 b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} \\
&= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) a^k b^{n-k+1} + b^{n+1} \\
&= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^k b^{n-k+1} + b^{n+1} \quad \text{par la formule du triangle de Pascal} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}.
\end{aligned}$$

D'où la propriété $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

On a ainsi montré que $\mathcal{P}(0)$ était vraie et que $\mathcal{P}(k) \Rightarrow \mathcal{P}(k+1)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, ce qui montre le résultat voulu par principe de récurrence.

(b) On a : $(a+b)^n = (a+b) \times (a+b) \times \cdots \times (a+b)$. Si on développe ce produit, les termes obtenus sont tous de la forme $a^k b^{n-k}$ (éventuellement plusieurs fois). Pour obtenir l'un de ces termes, il faut choisir k fois a dans les n facteurs (ce qui contraint à prendre b dans tous les autres), il y a donc $\binom{n}{k}$ manières de faire cela. Ainsi chaque terme $a^k b^{n-k}$ est obtenu $\binom{n}{k}$ fois. D'où la formule précédente.

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et E un ensemble à n éléments. Le nombre de parties N de E est égal au nombre de parties à 0 éléments, plus le nombre de parties à 1 éléments, …, plus le nombre de parties à n éléments. Ainsi,

$$N = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n.$$

Variante : Soit E un ensemble, on note $\mathrm{Card}(P(E))$ le nombre de ses parties. On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathcal{H}(n)$:

$$\boxed{\text{Soit } E \text{ un ensemble de } n \text{ éléments, alors } \mathrm{Card}(P(E)) = 2^n.}$$

— La propriété $\mathcal{H}(0)$ est vraie : l'ensemble vide $\emptyset$ admet un unique sous ensemble (lui-même) et $2^0 = 1$.

— On suppose maintenant la propriété $\mathcal{H}(n)$ vraie. Soit F un ensemble à $n+1$ éléments et soit $x \in F$. On note $E = F \backslash \{x\}$ de sorte que $F = E \cup \{x\}$. Les parties de F se décomposent en deux groupes : celles qui contiennent l'élément x et celles qui ne le contiennent pas. Les parties ne contenant pas l'élément x sont des parties de E, il y a donc 2^n telles parties par hypothèse de récurrence $\mathcal{H}(n)$. Les parties contenant l'élément x sont des parties de E auxquelles on a ajouté l'élément x, il y a donc également 2^n telles parties. Ainsi $\text{Card}(P(F)) = 2^n + 2^n = 2^{n+1}$. On a montré que la propriété $\mathcal{H}(n+1)$ est vraie.

On a ainsi montré que $\mathcal{H}(0)$ était vraie et que $\mathcal{H}(k) \Rightarrow \mathcal{H}(k+1)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, ce qui montre le résultat voulu par principe de récurrence.

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k 1^{n-k} = (1-1)^n = 0.$$

Exercice 20

1. Soient $x \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}$. Par définition de la partie entière, on a

$$\lfloor a^k x \rfloor \leqslant a^k x < \lfloor a^k x \rfloor + 1.$$

Puis , a^k étant strictement positif, on en déduit

$$\frac{\lfloor a^k x \rfloor}{a^k} \leqslant x < \frac{\lfloor a^k x \rfloor}{a^k} + \frac{1}{a^k}.$$

2. De la question précédente, on déduit, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$x - \frac{1}{a^k} < \frac{\lfloor a^k x \rfloor}{a^k} \leqslant x.$$

Or $\lim\limits_{k \to 0} x - \dfrac{1}{a^k} = x$, on en déduit par le théorème d'existence d'une limite finie par encadrement (théorème des gendarmes) que la suite $\left(\frac{\lfloor a^k x \rfloor}{a^k}\right)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers le réel x.

3. On commence par montrer que, pour tout réel y et tout entier n, on a l'inégalité

$$n\lfloor y \rfloor \leqslant \lfloor ny \rfloor.$$

Soit $\alpha = y - \lfloor y \rfloor \in [0;1[$. On a

$$\begin{array}{rcl} ny & = & n\left(\lfloor y \rfloor + \alpha\right) \\ & = & n\lfloor y \rfloor + n\alpha \\ \text{donc} & & \\ \lfloor ny \rfloor & = & \lfloor n\lfloor y \rfloor + n\alpha \rfloor \\ & = & n\lfloor y \rfloor + \lfloor n\alpha \rfloor \quad \text{d'après l'exercice 19.1, car } n\lfloor y \rfloor \in \mathbb{N} \\ & \geqslant & n\lfloor y \rfloor \quad \text{car } \lfloor n\alpha \rfloor > 0. \end{array}$$

On en déduit,

$$\frac{\lfloor a^{k+1} x \rfloor}{a^{k+1}} \geqslant \frac{a\lfloor a^k x \rfloor}{a^{k+1}} = \frac{\lfloor a^k x \rfloor}{a^k}.$$