Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre d'automne 2016-2017

Algèbre III - PMI

Feuille d'exercices n° 5

DIAGONALISATION

Exercice 1. Montrer que les matrices suivantes sont diagonalisables dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, et effectuer la diagonalisation en exhibant des matrices de passage :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2. Étudier la diagonalisabilité des matrices suivantes. Lorsqu'elles sont diagonalisables, effectuer la réduction, en exhibant en particulier une matrice de passage adéquate.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad ; \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ -5 & 4 & 0 \\ -8 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer le polynôme caractéristique et les valeurs propres de A.
2. A est-elle diagonalisable ?
3. Déterminer ses sous-espaces propres.
4. Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de A.
5. Calculer A^n pour tout entier naturel n.

Exercice 4. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $u(e_2)$, $u(e_1 + e_3)$ et $u(e_1 - e_3)$.
2. En déduire que u est diagonalisable et écrire la matrice de u dans une base de vecteurs propres.
3. Donner une interprétation géométrique de u.

Exercice 5. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique (e_1, e_2, e_3, e_4) est

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer le rang de u. En déduire que 0 est valeur propre de u.
2. Montrer que $e_1 + e_2 + e_3 + e_4$ est un vecteur propre de u.
3. Construire une base de $\mathbb{R}^4$ formée de vecteurs propres de u.

Exercice 6.

1. Que dire d'un endomorphisme diagonalisable dont le spectre est réduit à un élément ?
2. Les matrices suivantes sont-elles diagonalisables ?

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

3. À quelle condition une matrice triangulaire supérieure dont les éléments diagonaux sont tous égaux entre eux est-elle diagonalisable ?

Exercice 7. Soient $E = \mathbb{R}_n[X]$ et f l'application définie par $f(P) = (X^2 - 1)P'' + 2XP'$ pour tout $P \in E$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de E et former la matrice de f dans la base canonique de E.
2. En déduire que f est diagonalisable, et en déterminer les valeurs propres ainsi que les dimensions des sous-espaces propres associés.

Exercice 8. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$. En diagonalisant A, résoudre l'équation $M^n = A$, d'inconnue $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

Exercice 9. On pose $M = \begin{pmatrix} a & c & b \\ c & a+b & c \\ b & c & a \end{pmatrix}$, avec $a, b, c \in \mathbb{C}$. Étudier la diagonalisabilité de M.

Exercice 10. Soit $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On définit $u \in (E)$ par $u : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. Montrer que l'endomorphisme u est diagonalisable et construire une base de vecteurs propres de u.

Exercice 11. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et u un endomorphisme de E de rang égal à 1.

1. Montrer qu'il existe une valeur propre λ de u telle que $\operatorname{tr} u = \lambda$.
2. En déduire que u est diagonalisable si et seulement si $\operatorname{tr} u \neq 0$.

Exercice 12. Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $A \in E$. On considère l'endomorphisme φ de E défini par $\varphi(M) = AM$ pour tout $M \in E$.

1. En ordonnant convenablement la base canonique de E, trouver une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle φ a pour matrice la matrice diagonale par blocs $\operatorname{diag}(A, A, \ldots, A)$.
2. Comparer alors respectivement $\operatorname{tr} \varphi$, $\det \varphi$, $\operatorname{rg}\varphi$ et χ_φ avec $\operatorname{tr} A$, $\det A$, $\operatorname{rg}A$ et χ_A.
3. Montrer que φ est diagonalisable si et seulement si A l'est.