Université Claude Bernard - Lyon 1 | Automne 2014
Math II - PMI/CCP | Durée : 1 heure et 30 minutes

Problème - Devoir numéro 5
Les calculatrices ne sont pas autorisées

NB : ce problème a été pêché sur le site web d'une prépa du lycée Brizeux, à Quimper (dans sa version d'origine, ce n'est qu'une partie d'une épreuve de quatre heures...).

La moyenne arithmético-géométrique d'après Gauss

Soient a et b des réels vérifiant $0 < a < b$.

On construit les suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ par $a_0 = a$; $b_0 = b$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} a_{n+1} & = & \sqrt{a_n b_n} \\ b_{n+1} & = & \dfrac{a_n + b_n}{2} \end{cases}$$

Préliminaire

1. Montrer que a_n et b_n sont strictement positifs pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire que les suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ sont bien définies.

Partie 1. Étude de convergence

L'objectif de cette partie est d'établir que les suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ convergent vers une limite commune notée $m(a,b)$ et appelée la *moyenne arithmético-géométrique* de a et b.

2. Établir pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}_+^*$ l'inégalité
$$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$$
avec égalité si et seulement si $x = y$.

3. Montrer que $a_n < b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. En déduire que $(a_n)_n$ est strictement croissante et que $(b_n)_n$ est strictement décroissante.
5. On se propose dans cette question d'étudier la suite $(b_n - a_n)_n$
   (a) Montrer que $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{(b_n - a_n)^2}{2(\sqrt{a_n} + \sqrt{b_n})^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (b) En déduire que $|b_{n+1} - a_{n+1}| \leq \frac{1}{2}|b_n - a_n|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (c) Etablir par récurrence que $|b_n - a_n| \leq \frac{1}{2^n}|b_0 - a_0|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire la limite de $(b_n - a_n)_n$.
6. Conclure.

Partie 2. Vitesse de convergence

Dans cette partie, on veut estimer la vitesse de convergence des suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ vers $m(a,b)$.

7. Montrer qu'il existe une constante réelle k strictement positive telle que, pour tout entier naturel n :
$$0 \leq b_{n+1} - a_{n+1} \leq k(b_n - a_n)^2.$$
8. En déduire que la suite de terme général $\dfrac{b_{n+1} - a_{n+1}}{b_n - a_n}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

9. Montrer que $0 < m(a,b) - a_n < b_n - m(a,b)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
10. En déduire l'existence d'un réel $C > 0$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq b_{n+1} - m(a,b) \leq C\,(b_n - m(a,b))^2.$$

11. Justifier l'existence d'un entier $n_0 \geq 0$ tel que $0 < b_{n_0} - m(a,b) < \frac{1}{10C}$.
12. Montrer qu'alors pour tout $n \geq n_0$

$$0 < b_n - m(a,b) \leq C^{2^{n-n_0}-1}\,(b_{n_0} - m(a,b))^{2^{n-n_0}}.$$

On calcule les premières valeurs de la suite $(b_n)_n$ pour $a = 1$ et $b = \sqrt{2}$. On trouve les valeurs décimales approchées ci-dessous (On a effectué les calculs avec 50 chiffres après la virgule). On a mis en gras les décimales successives de b_i qui coincident avec celles de b_{i+1}.

$$\begin{aligned}
b_1 &= \mathbf{1.}20710678118654752440084436210484903928483593768 84\\
b_2 &= \mathbf{1.1981}5694809463429555917216633266247728890401507 61\\
b_3 &= \mathbf{1.1981402347}938772090828788690764074639904586267422\\
b_4 &= \mathbf{1.1981402347355922074}4063132863310408636114474 12997\\
b_5 &= \mathbf{1.198140234735592207439922492280323878227212}7680550\\
b_6 &= \mathbf{1.19814023473559220743992249228032387822721266321 56}
\end{aligned}$$

13. Qu'observez-vous sur le nombre de décimales en gras successives ? Justifier votre observation à l'aide des résultats précédemment obtenus.