Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre automne 2013-2014

Math I - CPGEI

Devoir n$^{\text{o}}$ 4

Problème - Correction

---

1. (a) Les solutions de (E) sont les racines cinquième de l'unité, donc l'ensemble des solutions de (E) est :

$$\left\{ e^{\frac{2ik\pi}{5}} \;\middle|\; k \in [\![0,4]\!] \right\} = \left\{ 1,\ e^{\frac{2i\pi}{5}},\ e^{\frac{4i\pi}{5}},\ e^{\frac{6i\pi}{5}},\ e^{\frac{8i\pi}{5}} \right\}.$$

(b) i. Soit $z \in \mathbf{C}$, $z^5 - 1 = (z-1)(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1)$, donc :

$$\forall z \in \mathbf{C},\ Q(z) = z^4 + z^3 + z^2 + z + 1.$$

ii. Soit $z \in \mathbf{C}^\star$,

$$\begin{aligned}
\left(z + \frac{1}{z}\right)^2 + z + \frac{1}{z} - 1 = 0 &\iff z^2 + 2 + \frac{1}{z^2} + z + \frac{1}{z} - 1 = 0 \\
&\iff \frac{z^4 + 2z^2 + 1 + z^3 + z - z^2}{z^2} = 0 \iff \frac{Q(z)}{z^2} = 0 \\
&\iff Q(z) = 0 \ \text{ car } z \neq 0.
\end{aligned}$$

iii. Notons Δ le discriminant de l'équation $\zeta^2 + \zeta - 1 = 0$, alors $\Delta = 5$. L'ensemble des solutions est donc :

$$\left\{ \frac{-1+\sqrt{5}}{2},\ \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \right\}.$$

iv. Soit $z \in \mathbf{C}$, $Q(0) \neq 0$, ainsi d'après les questions précédentes :

$$\begin{aligned}
Q(z) = 0 &\iff z + \frac{1}{z} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \ \text{ ou } \ z + \frac{1}{z} = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \\
&\iff z^2 - \frac{-1+\sqrt{5}}{2} z + 1 = 0 \ \text{ ou } \ z^2 - \frac{-1-\sqrt{5}}{2} z + 1 = 0.
\end{aligned}$$

Notons δ_1 le discriminant de la première équation et δ_2 le discriminant de la seconde, alors $\delta_1 = \frac{-5-\sqrt{5}}{2} < 0$ et $\delta_2 = \frac{-10+2\sqrt{5}}{4}$, ainsi :

$$\begin{aligned}
Q(z) = 0 \iff &\left(z = \frac{-1+\sqrt{5}+i\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} \text{ ou } z = \frac{-1+\sqrt{5}-i\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} \right) \\
&\text{ou } \left(z = \frac{-1-\sqrt{5}+i\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} \text{ ou } z = \frac{-1-\sqrt{5}-i\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} \right).
\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'équation $Q(z) = 0$ est donc :

$$\left\{ \frac{-1+\sqrt{5}+i\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}, \frac{-1+\sqrt{5}-i\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}, \frac{-1-\sqrt{5}+i\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}, \frac{-1-\sqrt{5}-i\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} \right\}.$$

v. On a vu que : $\forall z \in \mathbf{C}$, $z^5 - 1 = (z-1)Q(z)$, par conséquent :

$$z^5 - 1 = 0 \iff z - 1 = 0 \quad \text{ou} \quad Q(z) = 0\,.$$

Donc l'ensemble des solutions de (E) est :

$$\left\{ 1,\ \frac{-1+\sqrt{5}+i\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4},\ \frac{-1+\sqrt{5}-i\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4},\ \frac{-1-\sqrt{5}+i\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4},\ \frac{-1-\sqrt{5}-i\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} \right\}.$$

(c) • $0 < \frac{2\pi}{5} < \frac{\pi}{2}$ d'où $0 < \cos\frac{2\pi}{5} < 1$ et $0 < \sin\frac{2\pi}{5} < 1$, ainsi, d'après les questions (a) et (b) v., $e^{\frac{2i\pi}{5}} = \dfrac{-1+\sqrt{5}+i\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$, donc :

$$\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} \quad \text{et} \quad \sin\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\,.$$

• $\frac{\pi}{2} < \frac{4\pi}{5} < \pi$ d'où $-1 < \cos\frac{4\pi}{5} < 0$ et $0 < \sin\frac{4\pi}{5} < 1$, ainsi $e^{\frac{4i\pi}{5}} = \dfrac{-1-\sqrt{5}+i\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$, donc :

$$\cos\frac{4\pi}{5} = \frac{-1-\sqrt{5}}{4} \quad \text{et} \quad \sin\frac{4\pi}{5} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}\,.$$

(d) $\cos\dfrac{\pi}{5} = -\cos\left(\pi - \dfrac{\pi}{5}\right) = -\cos\dfrac{4\pi}{5} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$.

2. (a) $\sin\dfrac{h}{2} = 0 \iff \exists m \in \mathbf{Z},\ \dfrac{h}{2} = m\pi \iff \exists m \in \mathbf{Z},\ h = 2m\pi \iff e^{ih} = 1$.

(b) Si $\sin\dfrac{h}{2} = 0$ alors $e^{ih} = 1$, de plus :

$$\begin{aligned} C(a,h,n) + i\,S(a,h,n) &= \sum_{k=0}^{n-1} e^{i(a+kh)} = \sum_{k=0}^{n-1} e^{ia}\,(\underbrace{e^{ih}}_{1})^k \\ &= n\,e^{ia} = n\,\cos a + i\,n\,\sin a\,. \end{aligned}$$

Donc $C(a,h,n) = n\,\cos a$ et $S(a,h,n) = n\,\sin a$.

(c) Comme $\sin\dfrac{h}{2} \neq 0$ alors $e^{ih} \neq 1$, ainsi :

$$\begin{aligned} C(a,h,n) + i\,S(a,h,n) &= \sum_{k=0}^{n-1} e^{i(a+kh)} = e^{ia} \sum_{k=0}^{n-1} (e^{ih})^k \\ &= e^{ia}\,\frac{1-e^{inh}}{1-e^{ih}} = e^{ia}\,\frac{e^{in\frac{h}{2}}}{e^{i\frac{h}{2}}}\,\frac{e^{-in\frac{h}{2}} - e^{in\frac{h}{2}}}{e^{-i\frac{h}{2}} - e^{i\frac{h}{2}}} \\ &= e^{ia}\,e^{i(n-1)\frac{h}{2}}\,\frac{\sin\left(\frac{nh}{2}\right)}{\sin\left(\frac{h}{2}\right)} = e^{i(a+\frac{(n-1)h}{2})}\,\frac{\sin\left(\frac{nh}{2}\right)}{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}. \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$C(a,h,n) = \mathrm{Re}[C(a,h,n) + i\,S(a,h,n)] = \frac{\sin\left(\frac{nh}{2}\right) \times \cos\left(a + \frac{(n-1)h}{2}\right)}{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}$$

et :

$$S(a,h,n) = \mathrm{Im}[C(a,h,n) + i\,S(a,h,n)] = \frac{\sin\left(\frac{nh}{2}\right) \times \sin\left(a + \frac{(n-1)h}{2}\right)}{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}.$$

3. (a) i. $x_1 + x_2 = \sum_{k=0}^{7} \cos[(2k+1)\theta] = \sum_{k=0}^{7} \cos[\theta + k(2\theta)] = C(\theta, 2\theta, 8)$, d'où $(a, h, n) = (\theta, 2\theta, 8)$.

ii. D'après la question précédente :

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= C(\theta, 2\theta, 8) = \frac{\sin\left(\frac{8\times 2\theta}{2}\right) \times \cos\left(\theta + \frac{7\times 2\theta}{2}\right)}{\sin\theta} \\ &= \frac{\sin(8\theta)\times\cos(8\theta)}{\sin\theta} = \frac{\frac{1}{2}\sin(16\theta)}{\sin\theta} \\ &= \frac{1}{2}\,\frac{\sin(17\theta-\theta)}{\sin\theta} = \frac{1}{2}\,\frac{\sin(\pi-\theta)}{\sin\theta} = \frac{1}{2}\,\frac{\sin\theta}{\sin\theta} \\ &= \frac{1}{2}\,. \end{aligned}$$

(b) i. Soit $x \in \mathbf{C}$, $(x - x_1)(x - x_2) = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2$. Or $x_1 + x_2 = \frac{1}{2}$ et $x_1x_2 = -1$, par conséquent, pour tout $x \in \mathbf{C}$:

$$(x - x_1)(x - x_2) = x^2 - \frac{1}{2}\,x - 1\,.$$

ii. Soit $x \in \mathbf{C}$, la question précédente montre que :

$$x^2 - \frac{1}{2}\,x - 1 = 0 \iff (x - x_1)(x - x_2) = 0 \iff x = x_1 \quad \text{ou} \quad x = x_2\,.$$

Ainsi x_1 et x_2 sont les solutions de l'équation $x^2 - \frac{1}{2}\,x - 1 = 0$. Résolvons cette équation :

$$\begin{aligned} x^2 - \frac{1}{2}\,x - 1 = 0 &\iff \left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{17}{16} = 0 \iff \left[\left(x - \frac{1}{4}\right) + \frac{\sqrt{17}}{4}\right]\left[\left(x - \frac{1}{4}\right) - \frac{\sqrt{17}}{4}\right] = 0 \\ &\iff \left(x - \frac{1-\sqrt{17}}{4}\right)\left(x - \frac{1+\sqrt{17}}{4}\right) = 0 \\ &\iff x = \frac{1-\sqrt{17}}{4} \quad \text{ou} \quad x = \frac{1+\sqrt{17}}{4}\,. \end{aligned}$$

Or $x_1 > 0$, donc : $x_1 = \dfrac{1+\sqrt{17}}{4}$ et $x_2 = \dfrac{1-\sqrt{17}}{4}$.

(c) i. $5\theta = \frac{5\pi}{17}$ et $6\theta = \frac{6\pi}{17}$, d'où : $0 < 5\theta < 6\theta < \frac{\pi}{2}$. Comme la fonction cos est strictement décroissante sur $[0, \pi/2]$, on obtient $\cos 6\theta < \cos 5\theta$.

ii. On remarque que $\cos 11\theta = \cos(17\theta - 6\theta) = \cos(\pi - 6\theta) = -\cos(6\theta)$, ainsi :

$$\cos 5\theta + \cos 11\theta = \cos 5\theta - \cos 6\theta > 0$$

d'après la question précédente.

iii. $3\theta = \frac{3\pi}{17}$ et $7\theta = \frac{7\pi}{17}$ d'où : $0 < 3\theta < 7\theta < \frac{\pi}{2}$. Donc $\cos 3\theta > 0$ et $\cos 7\theta > 0$.

iv. D'après les questions précédentes, $\cos 3\theta > 0$, $\cos 7\theta > 0$ et $\cos 5\theta + \cos 11\theta > 0$, par conséquent :

$$x_1 = \cos 3\theta + \cos 5\theta + \cos 7\theta + \cos 11\theta > 0.$$