
Devoir n° 4
Partie commune

L'étudiant attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Il veillera à justifier soigneusement toutes ses réponses. Si un étudiant est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.
Les exercices sont réputés indépendants et peuvent donc être traités dans n'importe quel ordre. À l'intérieur d'un exercice, lorsqu'un étudiant ne peut répondre à une question, il lui est vivement recommandé de poursuivre en admettant le résultat qu'il lui était demandé de démontrer.

Exercice 1. Dans cet exercice, les solutions seront données sous forme algébrique.

1. Écrire $2i$ comme un carré.
2. Résoudre en $w \in \mathbf{C}$ l'équation $w^2 + (-1+i)w - i = 0$.
3. En déduire les solutions $z \in \mathbf{C}$ de l'équation $z^4 + (-1+i)z^2 - i = 0$.

Exercice 2. Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}$. On définit l'application

$$f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}, \qquad x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{\beta}{1 + \frac{1}{x^\alpha + 1}} & \text{si } x > 0 \\ \gamma & \text{sinon} \end{cases}.$$

1. (a) À quelle condition sur (α, β, γ) a-t-on $f(1) = 1$?

   (b) À quelle condition sur (α, β, γ) est-ce que f est continue en 0 ?

   On suppose dans la question qui suit que $(\beta, \gamma) = (\frac{3}{2}, \frac{3}{4})$ et l'on admettra qu'alors f est continue sur $\mathbf{R}$.

   (c) Dans ce cas, pour quelles valeurs de α est-ce que f est dérivable en 0 ?

On supposera dorénavant dans toute la suite de l'exercice que $(\alpha, \beta, \gamma) = (2, \frac{3}{2}, \frac{3}{4})$ et l'on admettra qu'alors f est dérivable sur $\mathbf{R}$, que $f'(0) = 0$ et que $f(1) = 1$.

2. (a) Montrer que f est croissante.

   (b) Montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}$

$$f(x) - x = \begin{cases} \dfrac{(1-x)\left[\,(x - \frac{1}{4})^2 + \frac{23}{16}\,\right]}{x^2 + 2} & \text{si } x > 0 \\ \frac{3}{4} - x & \text{sinon} \end{cases}.$$

   (c) En déduire que 1 est l'unique point fixe de f.

3. On se donne $a \in \mathbf{R}$ et l'on définit un suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ par $u_0 = a$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
   (a) Montrer que $u_0 \leq u_1$ si et seulement si $a \leq 1$.
   (b) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est croissante si $a \leq 1$ et décroissante si $a > 1$.
   (c) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers 1.

<u>Exercice 3.</u> Pour chacune des propositions, décider si elle est vraie ou fausse, et surtout *justifier avec précision* cette réponse par une démonstration ou un contre-exemple. Attention : aucune réponse ne sera prise en compte sans justification.

1. Toute suite réelle décroissante et majorée converge.
2. Toute fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ continue est dérivable.
3. Si $E \subset \mathbf{R}$ une partie non vide de $\mathbf{R}$ et $f : E \to \mathbf{R}$ est une fonction dérivable telle que

$$\forall x \in E, \quad f'(x) \leq 0 \ ,$$

   alors f est décroissante.
4. Pour tout nombre complexe $z \in \mathbf{C}$, on a : $2\,\mathrm{Im}\,z = z - \overline{z}$.
5. L'application $\mathbf{C}^* \to \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{C}^*$, $z \mapsto \left(|z|, \frac{z}{|z|}\right)$ est injective.
6. L'application $\mathbf{C}^* \to \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{C}^*$, $z \mapsto \left(|z|, \frac{z}{|z|}\right)$ est surjective.