Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2017-2018

Math IV - PMI - Analyse

Devoir 3 : 27 mars 2018 : partie analyse

On note par E l'ensemble de toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ admettant un développement $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ en série entière qui converge partout (c-à-d, dont le rayon de convergence est $+\infty$).

On admet que E est un espace vectoriel réel.

(1) Il est clair que E inclut les polynômes ; c-à-d, les éléments de $\mathbb{R}[x]$. Donner (justifier très brièvement) un exemple d'un élément de E qui n'est pas un polynôme.

(2) Donner (justifier très brièvement) un exemple d'une fonction g dans $C^{\infty}(\mathbb{R})$ qui n'appartient pas à E.

(3) Soit $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ un élément de E. Prouver que $\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|^2 < +\infty$.

(4) Soit $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ un élément de E. Prouver que $\sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n| = \max_{n\in\mathbb{N}} |a_n| < +\infty$.

(5) Pour $f \in E$, on pose $N_\infty(f) := \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n|$. Prouver que N_∞ est une norme sur E.

(6) On admet que la fonction N_1 définie par $N_1(f) := \sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|$ est une norme sur E. Les normes N_1 et N_∞ sont-elles équivalentes ?

(7) Prouver que les fonctions θ et φ définies par $\theta(f) := \sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|^2$ et $\varphi(f) := \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_{2n}|$ ne sont pas des normes sur E.

(8) Montrer que la suite (f_k), où f_k est le polynôme $\left(x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots + kx^k\right)/k^2$, converge pour la norme N_∞, et trouver sa limite.

(9) Prouver que l'ensemble des polynômes ne constitue pas un fermé dans l'evn (E, N_∞).

(10) Prouver que l'ensemble T des trinômes (c-à-d, les fonctions f de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$ pour certaines constantes a, b, c) forment une partie fermée dans (E, N_∞).

(11) Prouver que la fonction N_0 donnée par $N_0(f) := \sup_{|x|\leq 1} |f(x)|$ est bien définie lorsque $f \in E$, et que N_0 est une norme sur E.

Devoir 3 : 27 mars 2018 : partie analyse : Correction

(1) e^x ou $\sin x$, par exemple, dont le développement (qui est unique) est connu et contient un infini de termes.

(2) $1/(1+x^2)$ et $\ln(1+x^2)$ sont des fonctions C^∞ ; le développement de la première (par exemple) satisfait $|a_{2n}| = 1$, ce qui montre que le rayon de convergence n'est pas $+\infty$.

(3) On sait que $\sum a_n 2^n$ converge $\implies |a_n| = O_\infty(2^{-n})$, ce qui donne la conclusion par comparaison.

(4) Il suit de la partie (c) que $|a_n| \to 0$; le sup est en conséquent fini et atteint.

(5) N_∞ est bien définie par (d) ; on vérifie facilement les conditions d'une norme.

(6) Non : une condition générale telle $N_1(h) \leq \beta N_\infty(h) \; \forall h \in E$ est impossible, comme le montre les fonctions $h_k = 1 + x + x^2 + \cdots + x^k$.

(7) Pour θ : l'homogénéité positive fait défaut ; pour φ : $\varphi(x^3) = 0$ mais x^3 n'est pas 0 (donc φ n'est pas définie positive).

(8) $N_\infty(f_k) = 1/k \implies f_k \to 0$ pour N_∞.

(9) Les polynômes $g_k = \sum_0^k x^n/n!$ convergent (pour N_∞) vers $e^x = \sum_0^\infty x^n/n!$, qui n'est pas un polynôme ; le critère séquentielle fait défaut.

(10) Si $f = \sum_{n=0}^\infty a_n x^n \in E$ n'est pas un trinôme, il existe $M > 2$ tel que $a_M \neq 0$; alors $g = \sum_{n=0}^\infty b_n x^n$ n'est pas un trinôme dès que $N_\infty(f-g) < |a_n|$ (car alors $b_M \neq 0$). Ceci prouve que le complémentaire de T est ouvert, donc que T est fermé.

(11) Les éléments de E sont des fonctions continues (cours), donc bornées sur la boule unité ; alors $N_0(f)$ est finie. On a vérifié en TD les propriétés d'une norme pour la norme sup ; ici, il faut vérifier de plus que $N_0(f) = 0$ implique $f = 0$. Or si une série entière $\sum_{i=0}^\infty a_n x^n$ converge et est nulle sur la boule unité, alors tous les coefficients a_n sont nuls (cours).