Devoir n° 2

PROBLÈME - CORRECTION

1. (a) Soit $x \in \mathbf{R}$,

$$\begin{aligned}(f+g)(x) &= f(x)+g(x) = x^2(1-x^3)+x^2(x-1)(x^2+x+1)+5\\ &= x^2(1-x^3)+x^2(x^3-1)+5\\ &= x^2(1-x^3)-x^2(1-x^3)+5 = 5.\end{aligned}$$

Donc $f+g$ est la fonction constante égale à 5.

(b) Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, on définit $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ par, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $g(x) = -f(x)$.
Soit $x \in \mathbf{R}$, alors $(f+g)(x) = f(x)+g(x) = f(x)-f(x) = 0$. Donc $f+g = \Theta$ et g convient.

(c) Soit $x \in \mathbf{R} \setminus \{-1, 1\}$,

$$\begin{aligned}(f \times g)(x) &= f(x) \times g(x) = \frac{1}{1+x^2+x^4+x^6} \times \frac{x^8-1}{x^2-1}\\ &= \frac{1-x^2}{1-(x^2)^4} \times \frac{x^8-1}{x^2-1} = 1.\end{aligned}$$

De plus, $(f \times g)(-1) = f(-1) \times g(-1) = 1$ et $(f \times g)(1) = f(1) \times g(1) = 1$.
On en déduit que, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $(f \times g)(x) = 1$, c'est-à-dire que $f \times g$ est la fonction constante égale à 1.

2. (a) On doit démontrer que :

$$\forall x \in \mathbf{R},\ x \in (f+g)^{-1}([a, +\infty[) \implies (x \in f^{-1}([a/2, +\infty[) \text{ ou } x \in g^{-1}([a/2, +\infty[)).$$

Soit $x \in \mathbf{R}$ tel que $x \in (f+g)^{-1}([a, +\infty[)$ et $x \notin f^{-1}([a/2, +\infty[)$.
Alors $(f+g)(x) \in [a, +\infty[$, ou encore $f(x)+g(x) \in [a, +\infty[$, ce qui signifie que $f(x)+g(x) \geq a$.
De plus, $f(x) \notin [a/2, +\infty[$, d'où $f(x) < \frac{a}{2}$, on déduit des deux inégalités précédentes que : $\frac{a}{2} + g(x) \geq a$ et donc : $g(x) \geq \frac{a}{2}$.
Par conséquent, $x \in g^{-1}([a/2, +\infty[)$, on a donc montré que :

$$(f+g)^{-1}([a, +\infty[) \subset f^{-1}([a/2, +\infty[) \cup g^{-1}([a/2, +\infty[).$$

(b) i. • Soit $x \in \mathbf{R}$,

$$\begin{aligned}x \in f^{-1}([1, +\infty[) &\iff f(x) \in [1, +\infty[\iff x^3 \in [1, +\infty[\\ &\iff x^3 \geq 1 \iff x \geq 1.\end{aligned}$$

Donc $f^{-1}([1, +\infty[) = [1, +\infty[$.

• Soit $x \in \mathbf{R}$,

$$\begin{aligned}x \in g^{-1}([1, +\infty[) &\iff g(x) \in [1, +\infty[\iff -x^3 \in [1, +\infty[\\ &\iff -x^3 \geq 1 \iff x^3 \leq -1 \iff x \leq -1.\end{aligned}$$

Donc $g^{-1}([1, +\infty[) =]-\infty, -1]$.

ii. Pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x)+g(x)=0$, ainsi $f+g=\Theta$. Soit $x \in \mathbf{R}$,

$$\begin{aligned} x \in (f+g)^{-1}([2,+\infty[) &\iff (f+g)(x) \in [2,+\infty[\iff \Theta(x) \in [2,+\infty[\\ &\iff 0 \in [2,+\infty[. \end{aligned}$$

Donc $(f+g)^{-1}([2,+\infty[)=\emptyset$.

3. (a) • On suppose que $A \subset B$. Soit $x \in \mathbf{R}$.
Si $x \in A$, alors $f(x)=1$ et $x \in B$ puisque $A \subset B$, d'où $g(x)=1$ et donc $f(x) \leq g(x)$.
Si $x \notin A$ alors $f(x)=0$ et comme $g(x) \in \{0,1\}$, on a : $f(x) \leq g(x)$.
Par conséquent, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x) \leq g(x)$.
• Réciproquement, on suppose que, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x) \leq g(x)$. Soit $x \in A$, alors $f(x)=1$, comme $g(x) \in \{0,1\}$ et $f(x) \leq g(x)$, on a : $g(x)=1$; d'où $x \in B$ et donc $A \subset B$.
On en déduit l'équivalence demandée.

(b) Soit $x \in \mathbf{R}$,

$$\begin{aligned} x \in A \cap B &\iff x \in A \text{ et } x \in B \iff f(x)=1 \text{ et } g(x)=1 \\ &\iff f(x)g(x)=1 \quad \text{car} \quad f(x) \in \{0,1\} \text{ et } g(x) \in \{0,1\} \\ &\iff (f \times g)(x)=1. \end{aligned}$$

(c) Soit $x \in \mathbf{R}$.
• On suppose $x \in A \cup B$, alors $x \in A$ ou $x \in B$, d'où $f(x)=1$ ou $g(x)=1$.
– Si $f(x)=1$ et $g(x)=0$, alors :

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=1 \quad \text{et} \quad 1+(f \times g)(x)=1+f(x)g(x)=1.$$

– Si $f(x)=1$ et $g(x)=1$, alors :

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=2 \quad \text{et} \quad 1+(f \times g)(x)=1+f(x)g(x)=2.$$

– Si $f(x)=0$ et $g(x)=1$, alors :

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=1 \quad \text{et} \quad 1+(f \times g)(x)=1+f(x)g(x)=1.$$

Donc $(f+g)(x)=1+(f \times g)(x)$.
• Pour la réciproque on raisonne par contraposée : si $x \notin A \cup B$ alors $x \notin A$ et $x \notin B$, d'où $f(x)=0$ et $g(x)=0$, ainsi :

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=0 \quad \text{et} \quad 1+(f \times g)(x)=1+f(x)g(x)=1.$$

D'où $(f+g)(x) \neq 1+(f \times g)(x)$. On en déduit l'équivalence cherchée.

4. (a) i. Soit $x \in \mathbf{R}$,

$$g(-x)=\frac{f(-x)+f(-(-x))}{2}=\frac{f(x)+f(-x)}{2}=g(x) \ ;$$

et :

$$h(-x)=\frac{f(-x)-f(-(-x))}{2}=\frac{f(-x)-f(x)}{2}=-h(x).$$

Donc g est paire et h est impaire.

Soit $x \in \mathbf{R}$,

$$(g+h)(x) = g(x) + h(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} + \frac{f(x)-f(-x)}{2} = f(x),$$

donc $f = g + h$.

ii. Soit $x \in \mathbf{R}$,

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{f(x)+f(-x)}{2} \\ &= \frac{(x^9+3x^8-7x^5+2x^4+8x^3-x^2+4)+(-x^9+3x^8+7x^5+2x^4-8x^3-x^2+4)}{2} \\ &= 3x^8+2x^4-x^2+4, \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{f(x)-f(-x)}{2} \\ &= \frac{(x^9+3x^8-7x^5+2x^4+8x^3-x^2+4)-(-x^9+3x^8+7x^5+2x^4-8x^3-x^2+4)}{2} \\ &= x^9-7x^5+8x^3. \end{aligned}$$

Donc $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto 3x^8+2x^4-x^2+4$ et $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto x^9-7x^5+8x^3$.

(b) i. Soit $x \in \mathbf{R}$, $\Phi(-x) = g_1(-x) - g_2(-x) = g_1(x) - g_2(x) = \Phi(x)$ car g_1 et g_2 sont paires, ainsi Φ est paire.

Comme $g_1 + h_1 = g_2 + h_2$, on a aussi, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\Phi(x) = h_2(x) - h_1(x)$.

Soit $x \in \mathbf{R}$, $\Phi(-x) = h_2(-x) - h_1(-x) = -h_2(x) + h_1(x) = -\Phi(x)$ car h_1 et h_2 sont impaires, donc Φ est impaire.

ii. Soit $x \in \mathbf{R}$, on a : $\Phi(-x) = \Phi(x)$ et $\Phi(-x) = -\Phi(x)$ car Φ est paire et impaire.

On en déduit que : $\Phi(x) = -\Phi(x)$ ou encore que $2\Phi(x) = 0$, c'est-à-dire : $\Phi(x) = 0$.

Donc $g_1(x) = g_2(x)$ et $h_1(x) = h_2(x)$, et finalement, $g_1 = g_2$ et $h_1 = h_2$.