Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre automne 2013-2014

Math I - CPGEI

Devoir n° 2

PROBLÈME

L'étudiant attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Il veillera à justifier soigneusement toutes ses réponses. Si un étudiant est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.
Lorsqu'un étudiant ne peut répondre à une question, il lui est vivement recommandé de poursuivre en admettant le résultat qu'il lui était demandé de démontrer.

Pour toutes fonctions $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ et $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, on définit les fonctions $f + g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ et $f \times g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbf{R},\ (f + g)(x) = f(x) + g(x) \ \text{ et } \ (f \times g)(x) = f(x) \times g(x).$$

On rappelle qu'une fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est dite
– *paire* si, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(-x) = f(x)$;
– *impaire* si, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(-x) = -f(x)$.

On note $\Theta : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto 0$.

1. (a) On considère $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto x^2(1 - x^3)$ et $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto x^2(x - 1)(x^2 + x + 1) + 5$. Montrer que $f + g$ est une fonction constante.
   (b) Montrer que, pour toute fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, il existe $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ telle que $f + g = \Theta$.
   (c) On considère $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \longmapsto \dfrac{1}{1 + x^2 + x^4 + x^6}$ et
   $$g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{x^8 - 1}{x^2 - 1} & \text{si } x \notin \{-1, 1\} \\ 4 & \text{sinon} \end{cases}.$$
   Montrer que $f \times g$ est une fonction constante.

2. (a) Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ et $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ deux fonctions et $a \in \mathbf{R}$.
   Montrer que :
   $$(f + g)^{-1}([\,a, +\infty[\,) \ \subset \ f^{-1}\left([\,a/2, +\infty[\,\right) \cup g^{-1}([\,a/2, +\infty[\,).$$
   (b) On considère $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto x^3$ et $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto -x^3$.
      i. Calculer $f^{-1}([\,1, +\infty[\,)$ et $g^{-1}([\,1, +\infty[\,)$.

ii. Calculer $(f+g)^{-1}([2,+\infty[)$.

3. Soit $A \subset \mathbf{R}$ et $B \subset \mathbf{R}$. On considère les fonctions

$$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ x \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases} \quad \text{et} \quad g : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ x \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in B \\ 0 & \text{si } x \notin B \end{cases}.$$

(a) Montrer que : $A \subset B \iff (\forall x \in \mathbf{R},\ f(x) \leq g(x))$.

(b) Montrer que : $\forall x \in \mathbf{R}$, $(x \in A \cap B \iff (f \times g)(x) = 1)$.

(c) Montrer que : $\forall x \in \mathbf{R}$, $(x \in A \cup B \iff (f+g)(x) = 1 + (f \times g)(x))$.

4. (a) Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction. On définit

$$g : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ x \longmapsto \frac{f(x)+f(-x)}{2} \qquad \text{et} \qquad h : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ x \longmapsto \frac{f(x)-f(-x)}{2}.$$

i. Montrer que g est paire, h est impaire et que $f = g + h$.

ii. Calculer g et h pour la fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto x^9 + 3x^8 - 7x^5 + 2x^4 + 8x^3 - x^2 + 4$.

(b) Soit $g_1 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g_2 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ deux fonctions paires et $h_1 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $h_2 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ deux fonctions impaires telles que $g_1 + h_1 = g_2 + h_2$.

i. Montrer que la fonction $\Phi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto g_1(x) - g_2(x)$ est à la fois paire et impaire.

ii. En déduire que $g_1 = g_2$ et $h_1 = h_2$.