Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre automne 2013-2014

Math I - CPGEI

Devoir n° 1

PARTIE COMMUNE

L'étudiant attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Il veillera à justifier soigneusement toutes ses réponses. Si un étudiant est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.
Les exercices sont réputés indépendants et peuvent donc être traités dans n'importe quel ordre. À l'intérieur d'un exercice, lorsqu'un étudiant ne peut répondre à une question, il lui est vivement recommandé de poursuivre en admettant le résultat qu'il lui était demandé de démontrer.

Exercice 1. Pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, on pose : $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, $S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.
2. Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, l'on ait
$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1}.$$
3. Donner, en fonction de $n \in \mathbf{N}^\star$, une expression simple de $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{S_j}$.
4. En déduire que la suite $\displaystyle\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{S_j}\right)_{n\in\mathbf{N}^\star}$ converge et donner sa limite.

Exercice 2. Déterminer le minimum et le maximum des ensembles qui suivent :
$$A = \left\{ \, |x|\,(1-y^2) \;\middle|\; (x,y) \in [-2,1] \times [-1,3] \, \right\}$$
$$B = \left\{ \, (2+x)\,(1+y) \mid (x,y) \in [-4,7] \times [-2,1] \, \right\} .$$

Exercice 3. Soit $p \in [0,1]$. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, on pose
$$u_k^{(n)} = \binom{n}{k} p^k \, (1-p)^{n-k}$$
où $\dbinom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$.

1. Donner, en fonction de $n \in \mathbf{N}$ et p, une expression simple de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k^{(n)}$.
2. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose $E_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\, u_k^{(n)}$.
   (a) Calculer E_0, E_1, E_2 et E_3.
   (b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $k\, u_k^{(n)} = np\; u_{k-1}^{(n-1)}$.
   (c) En déduire, en fonction de $n \in \mathbf{N}^\star$ et p, une expression simple de E_n.

Exercice 4. Pour chacune des propositions, décider si elle est vraie ou fausse, et surtout *justifier avec précision* cette réponse par une démonstration ou un contre-exemple. Attention : aucune réponse ne sera prise en compte sans justification.

1. Pour tout réel $x \in \mathbf{R}$, on a : $(1+x)^4 \geq 1+x$.
2. En notant $\lfloor \cdot \rfloor$ la partie entière, on a, pour tout couple de réels $(x,y) \in \mathbf{R}^2$, $\lfloor x+y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$.
3. L'ensemble $\mathscr{C}_1 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + 6x + y^2 - 10y - 15 = 0\}$ est un cercle.
4. L'ensemble $\mathscr{C}_2 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 0\}$ est l'union de deux droites.
5. Il existe un entier naturel $n \in \mathbf{N}$ tel que pour tout réel positif $x \in \mathbf{R}_+$ l'on ait : $n\sqrt{2} \geq x$.
6. La suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}} = \left(\dfrac{(-1)^n + \sqrt{n}}{n\sqrt{n}+5}\right)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers 0.