Université Claude Bernard - Lyon 1 — Semestre de printemps 2012-2013

Cursus préparatoires, 1ère année — Durée : 1 heure et 30 minutes

---

Partie commune - devoir n° 2

Exercice 1. *(Les deux parties de l'exercice sont indépendantes)*
Soient a et b deux nombres complexes, et

$$P(X) = X^3 + 2aX^2 + a^2X + b.$$

I) On note x_1, x_2, x_3 les racines de P dans $\mathbb{C}$, c.-à.-d. les valeurs de $\mathbb{C}$ telles que $P(X) = (X - x_1)(X - x_2)(X - x_3)$. Attention, il ne s'agit pas de calculer explicitement x_1, x_2 et x_3.

(I.a) Calculer en fonction de a et b les quantités $x_1 + x_2 + x_3$ et $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$,

(I.b) En déduire $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$,

(I.c) En utilisant $P(x_i) = 0$ pour $i \in \{1, 2, 3\}$, exprimer x_i^3 et en déduire $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$.

II) Pour le même polynôme P,

(II.a) Déterminer les racines de P', polynôme dérivé de P, dans $\mathbb{C}$,

(II.b) Comment choisir b en fonction de a pour que P possède une racine multiple ?

(II.c) Dans chaque cas, décomposer P en produit de facteurs irréductibles,

(II.d) Dans quel cas P admet-il une racine triple ?

Exercice 2. Déterminer pour chacune des fonctions f un développement limité de f en 0 à l'ordre n :

a) $f(x) = \big(1 + \cos(2x)\big)\big(x - \ln(1 + x)\big)$ et $n = 4$,

b) $f(x) = \frac{\ln(1+x^3)}{6[x-\sin(x)]}$ et $n = 3$,

c) $f(x) = e^{\sqrt{\cos(x)}}$ et $n = 2$, *Indication : On peut considérer successivement les développements du cosinus, de la racine puis de l'exponentielle.*

Exercice 3. Calculer les cinq racines cinquièmes de -1 dans $\mathbb{C}$. En déduire la factorisation du polynôme $X^5 + 1$ en polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ puis sa factorisation en polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 4. Calculer les limites suivantes :

a) $\left(\frac{\sin(x)}{\mathrm{sh}(x)}\right)^{1/x^2}$ pour $x \to 0$, *Indication : Commencer par un D.L. de la fonction* $x \mapsto \frac{\sin(x)}{\mathrm{sh}(x)}$ *autour de* 0.

b) $\frac{x^e - e^x}{(x-e)^2}$ pour $x \to e$, *Indication : Penser à écrire* $x = e + (x - e)$ *avec* $(x - e)$ *petit.*