Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2017-2018

Analyse IV Durée : 1 heure 30

Session 2 de l'examen final du jeudi 28 juin 2018

Aucun document et aucune calculatrice ne sont autorisés durant l'épreuve. L'usage des téléphones est prohibé. La justification des réponses et un soin particulier de la présentation seront demandés et pris en compte lors de la notation.
Les trois exercices sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre.

Exercice 1. On s'intéresse aux fonctions y développables en série entière de la forme $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ autour de 0 qui sont solutions (autour de 0) de l'équation différentielle

$$x(1-x)y''(x) + (1-5x)y'(x) - 3y(x) \;=\; 0.$$

1. Prouver que les coefficients a_n d'une telle fonction doivent satisfaire la récurrence
$$a_{n+1} \;=\; \frac{n+3}{n+1}\, a_n \quad (n \geq 0).$$
2. On impose maintenant et par la suite la condition initiale $y(0) = 1$. Trouver alors une formule pour les a_n $(n \geq 0)$.
3. Quel est le rayon de convergence R de la série entière ainsi obtenue ?
4. Trouver une forme explicite de la fonction y sur $]-R; R[$ à l'aide de fonctions usuelles (donc pas en forme de série entière).

Exercice 2. Les trois parties de l'exercice sont indépendantes.

1. Soit E l'espace vectoriel des fonctions C^1 sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ tel que $f(0) = 0$.
   (a) On pose pour tout $f \in E$, $N_1(f) = \|f\|_\infty$ et $N_2(f) = \|f'\|_\infty$. Montrer que N_1 et N_2 sont des normes sur E (on donnera la démonstration du résultat de cours pour N_1).
   (b) Montrer que $N_1(f) \leq N_2(f)$ pour tout $f \in E$. En déduire que l'application identité de (E, N_2) vers (E, N_1) est continue.
   (c) Montrer que N_1 et N_2 ne sont pas équivalentes. (Indication : On pourra considérer sur $[0,1]$, la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ avec $f_n(x) = \frac{x^n}{n}$.)
2. Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[-1,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ muni de la norme
$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|dx.$$
   On considère l'application $L\colon E \to \mathbb{R}$, qui à f associe la valeur $f(1)$: $L(f) = f(1)$.
   (a) Montrer que L est une application linéaire.
   (b) En considérant les fonctions $f_n : x \to \sqrt{n}x^n$, montrer que L n'est pas continue.
3. Soit E un espace vectoriel normé, $A, B \subset E$. On définit
$$A + B = \{a + b;\, a \in A,\, b \in B\}$$

(a) Soit $a \in A$, $b \in B$. Montrer que $B(a+b,r) = B(a,r) + \{b\}$ pour tout $r > 0$.

(b) On suppose que A est un ouvert de E. Montrer alors que $A + B$ est un ouvert de E.

Exercice 3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction $u_n : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad u_n(x) = (-1)^n \ln\left(1 + \frac{x}{n(1+x)}\right).$$

1. Montrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}^*} u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$.
2. Montrer qu'elle ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}^+$.
3. Montrer qu'elle converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$.

Correction de la session 2 de l'examen final du 28 juin 2018

Correction de l'exercice 1

1. Soit y une fonction développable en série entière autour de 0 solution de l'équation différentielle donnée que l'on notera (E). Alors il existe $r > 0$ et une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence $R \geq r$ tel que $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ pour tout $x \in]-r; r[$. Par le cours, y est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-r; r[$ et ses dérivées successives s'obtiennent par dérivation terme à terme. Pour $x \in]-r; r[$, on a donc

$$\begin{aligned}
& x(1-x)y''(x) + (1-5x)y'(x) - 3y(x) \\
= \quad & x(1-x)\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + (1-5x)\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 3\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\
= \quad & \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} - \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 5\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - 3\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\
= \quad & \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1)n a_{n+1} x^n - \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1} a^n - 5\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - 3\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\
= \quad & \sum_{n=0}^{+\infty} \left((n+1)n + (n+1)a_{n+1} - (n(n-1) + 5n + 3)a_n\right) x^n \\
= \quad & \sum_{n=0}^{+\infty} \Big((n+1)^2 a_{n+1} - (n+1)(n+3)a_n\Big) x^n
\end{aligned}$$

(car les premiers termes des sommes commençant à $n \geq 1$ ou 2 sont nuls). Puisque y est solution de (E), on obtient donc

$$\forall x \in]-r; r[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \Big((n+1)^2 a_{n+1} - (n+1)(n+3)a_n\Big) x^n = 0$$

et par unicité du développement en série entière :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n+1)^2 a_{n+1} - (n+1)(n+3)a_n \qquad \text{d'où} \qquad a_{n+1} = \frac{n+3}{n+1} a_n.$$

2. On suppose désormais que $y(0) = 1$ *i.e.* $a_0 = 1$. En calculant les premiers termes, ou en réitérant la relation de récurrence, on intuite que $a_n = \dfrac{(n+2)!}{2n!} a_0 = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$. Montrons ce résultat par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.
   - Pour $n = 0$, $\dfrac{(n+1)(n+2)}{2} = 1 = a_0$.
   - Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que l'hypothèse de récurrence est vraie au rang n. Alors
   $$a_{n+1} = \frac{n+3}{n+1} a_n = \frac{n+3}{n+1} \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{(n+2)(n+3)}{2}$$
   ce qui prouve l'hérédité.

   Par principe de récurrence, on a donc $a_n = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. Puisque $a_n \neq 0$ pour tout n, on peut utiliser la règle de D'Alembert :
$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{n+3}{n+1} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1$$
donc le rayon de la série entière $\sum a_n x^n$ est $R = \dfrac{1}{1} = 1$.

4. Pour tout $x \in]-1;1[$, on a

$$y(x) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)(n+2)x^n = \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)x^{n-2}.$$

Or par le cours, on sait que la fonction $S : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \dfrac{1}{1-x}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1;1[$ et dérivable terme à terme. On reconnait alors ci-dessus l'expression de la dérivée seconde de S ce qui entraîne

$$y(x) = \frac{1}{2}S''(x) = \frac{1}{2}\frac{2}{(1-x)^3} = \frac{1}{(1-x)^3}.$$

Correction de l'exercice 2

1. (a) • Tout d'abord, les applications $N_1 : f \longmapsto \sup_{x\in[0;1]} |f(x)|$ et N_2 sont bien définies de E dans $\mathbb{R}^+$ car toute fonction continue sur le segment $[0;1]$ est bornée (et atteint ses bornes).

• Soit $f \in E$, puisque pour tout $x \in [0;1]$, $0 \leq |f(x)| \leq \|f\|_\infty$, on a

$$N_1(f) = 0 \iff \sup_{x\in[0;1]} |f(x)| = 0 \iff \forall x \in [0;1],\quad |f(x)| = 0 \iff \forall x \in [0;1],\quad f(x) = 0 \iff f = 0_E.$$

• Soient $f \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

$$N_1(\lambda f) = \sup_{x\in[0;1]} |\lambda f(x)| = \sup_{x\in[0;1]} |\lambda|\,|f(x)| = |\lambda|\,N_1(f).$$

• Soient $f, g \in E$. Pour tout $x \in [0;1]$, par inégalité triangulaire

$$|(f+g)(x)| = |f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq N_1(f) + N_1(g).$$

Puisque la borne supérieure d'un ensemble est le plus petit majorant de cet ensemble, on en déduit que $N_1(f+g) \leq N_1(f) + N_1(g)$ ce qui achève de démontrer que N_1 est une norme sur E.

• L'homogénéité et l'inégalité triangulaire pour N_2 découlent alors de la linéarité de l'application de dérivation, et du fait que N_1 est une norme sur E. Soit $f \in E$, par la propriété de séparation de N_1,

$$\begin{aligned} N_2(f) = 0 \quad &\iff \quad N_1(f') = 0 \iff f' = 0_E \iff \exists \lambda \in \mathbb{R},\quad \forall x \in [0;1],\quad f(x) = \lambda \\ &\iff \quad \forall x \in [0;1], f(x) = 0 \iff f = 0_E \end{aligned}$$

puisque $f(0) = 0$. Ainsi, N_2 est une norme sur E.

(b) Soit $f \in E$. Puisque f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;1]$, pour tout $x \in [0;1]$, on peut écrire

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{puisque } f(0) = 0$$

d'où

$$|f(x)| \leq \int_0^x \underbrace{|f'(t)|}_{\leq N_2(f)}\,\mathrm{d}t \leq \int_0^x N_2(f)\,\mathrm{d}t = N_2(f).$$

Comme ci-dessus, par passage à la borne supérieure, on trouve $N_1(f) \leq N_2(f)$.

On peut revenir à la définition de la continuité ou montrer que l'application identité Id de (E, N_2) dans (E, N_1) est lipschitzienne par exemple. Soient $x, y \in E$, alors

$$N_1(\mathrm{Id}(x) - \mathrm{Id}(y)) = N_1(x-y) \leq N_2(x-y)$$

ce qui démontre que Id est 1-lipschitzienne donc continue.

(c) Supposons par l'absurde que N_1 et N_2 sont équivalentes, alors il existe $\alpha, \beta > 0$ tels que pour tout $f \in E$, $\alpha N_1(f) \leq N_2(f) \leq \beta N_1(f)$. En particulier, pour tout $n \geq 1$,

$$N_2(f_n) = \sup_{x\in[0;1]} x^{n-1} = 1 \leq \beta N_1(f_n) = \beta \sup_{x\in[0;1]} \frac{x^n}{n} = \frac{\beta}{n} \qquad (*)$$

par croissance des applications $x \longmapsto x^n$ et $x \longmapsto x^{n-1}$ sur $[0;1]$. En faisant tendre n vers $+\infty$ dans $(*)$, on obtient alors $1 \leq 0$ ce qui est contradictoire. Ainsi, N_1 et N_2 ne sont pas équivalentes.

2. (a) Soient $f, g \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $L(\lambda f + g) = (\lambda f + g)(1) = \lambda f(1) + g(1) = \lambda L(f) + L(g)$ donc L est une application linéaire.

(b) On peut utiliser l'une des caractérisations équivalentes de la continuité pour les applications linéaires pour montrer que L n'est pas continue. Supposons par l'absurde qu'il existe $k \in \mathbb{R}^+$ tel que pour tout $f \in E$, $|L(f)| \leq k\|f\|_1$, alors en particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$|L(f_n)| = \sqrt{n} \leq k\|f_n\|_1 = k\sqrt{n}\int_0^1 x^n \,\mathrm{d}x = k\sqrt{n}\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = k\frac{\sqrt{n}}{n+1}$$

d'où $1 \leq \dfrac{1}{n+1}$ ce qui donne de nouveau la contradiction $1 \leq 0$ lorsque $n \to +\infty$. Ainsi, L n'est pas continue.

3. (a) Soit $r > 0$. Soit $x \in B(a+b, r)$, alors $\|x - (a+b)\| < r$. On peut écrire $x = (x-b) + b$ avec $\|(x-b) - a\| = \|x - (a+b)\| < r$ ce qui montre que $x - b \in B(a, r)$, ainsi, $x \in B(a,r) + \{b\}$ d'où l'inclusion $B(a+b, r) \subset B(a,r) + \{b\}$. Réciproquement, soit $y \in B(a,r) + \{b\}$, alors il existe $z \in B(a,r)$ tel que $y = z + b$. On a $\|y - (a+b)\| = \|z - a\| < r$ ce qui montre que $y \in B(a+b, r)$ et achève la démonstration de $B(a+b,r) = B(a,r) + \{b\}$.

(b) On suppose que A est un ouvert de E. Soit $x \in A + B$, alors il existe $a \in A$ et $b \in B$ tel que $x = a + b$. Puisque $a \in A$ avec A ouvert, il existe $r > 0$ tel que $B(a,r) \subset A$. On va chercher à démontrer que $B(x,r) \subset A + B$. Par la question précédente,

$$B(x,r) = B(a+b,r) = \underbrace{B(a,r)}_{\subset A} + \underbrace{\{b\}}_{\subset B} \subset A + B$$

ce qui démontre que $A + B$ est un ouvert de E.

Correction de l'exercice 3

1. Soit $x \geq 0$. Puisque $1 + \dfrac{x}{n(1+x)} \geq 1$, on a $(-1)^n u_n(x) \geq 0$ donc la série numérique $\sum u_n(x)$ est une série alternée.
   - Puisque $\dfrac{x}{1+x} \geq 0$, on sait que $\dfrac{x}{(n+1)(1+x)} \leq \dfrac{x}{n(1+x)}$ donc par croissance de la fonction ln, il vient $|u_{n+1}(x)| = \ln\left(1 + \dfrac{x}{(n+1)(1+x)}\right) \leq \ln\left(1 + \dfrac{x}{n(1+x)}\right) = |u_n(x)|$. Ainsi la suite $(|u_n(x)|)_{n\geq 1}$ est décroissante.
   - $|u_n(x)| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(1) = 0$ par continuité de ln.

   D'après le critère spécial des séries alternées, la série $\sum u_n(x)$ converge, ce qui démontre la convergence simple de la série de fonctions $\sum u_n$.

2. On sait que la convergence normale entraîne en particulier la convergence absolue simple. Soit $x > 0$, alors puisque $\dfrac{x}{n(1+x)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

$$|u_n(x)| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{x}{1+x}\frac{1}{n}$$

Or la série de Riemann $\sum \frac{1}{n}$ diverge et $\frac{x}{1+x} \neq 0$, donc par comparaison de séries à termes positifs, la série $|u_n(x)|$ diverge. Par suite, $\sum u_n$ ne peut pas converger normalement sur $\mathbb{R}^+$.

3. Soit $x \geq 0$. On a vu que la série $\sum u_n(x)$ converge par le critère des séries alternées. Par suite, si l'on note $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)$, on a aussi

$$|R_n(x)| \leq |u_{n+1}(x)| = \ln\left(1 + \frac{x}{(n+1)(1+x)}\right) \leq \ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)$$

puisque $\frac{x}{1+x} \leq \frac{x+1}{x+1} = 1$ et par croissance de ln. Ceci prouve que la fonction R_n est bornée sur $\mathbb{R}^+$, et comme la borne supérieure est le plus petit des majorants, on trouve

$$0 \leq \|R_n\|_{\infty;\mathbb{R}^+} = \sup_{x\in\mathbb{R}^+} |R_n(x)| \leq \ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

ce qui démontre que la suite de fonctions $(R_n)_n$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}^+$. Par conséquent, la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$.