Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre d'automne 2024-2025

Analyse 3 Durée : 2 heures

Examen final du 8 janvier 2025

Aucun document et aucune calculatrice ne sont autorisés durant l'épreuve. L'usage des téléphones est prohibé. La justification des réponses et un soin particulier de la présentation seront demandés et pris en compte lors de la notation.

Les 6 exercices sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre.

Le barème (sur 28 points) est uniquement indicatif et tient compte de la longueur du sujet.

Exercice 1. ($\simeq$ 2.5 points) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = (-1)^{n-1}\dfrac{2n+1}{n(n+1)}$.

1. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ est semi-convergente.
2. Calculer sa somme.

Exercice 2. ($\simeq$ 3.5 points)Les deux questions sont indépendantes.

1. À l'aide d'un changement de variable, déterminer la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\arcsin(x)\sqrt{1-x^2}\,(\ln(\arcsin(x)))^2}$.
2. Soit $a \in\,]0;1[$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur a pour que l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{-5}{a^t + t^a\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ soit convergente.

Exercice 3. ($\simeq$ 6.5 points)Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction $f_n : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ par

$$\forall t \in [0;1]\,, \quad f_n(t) = \frac{1+\sin(t^{3n})}{1+t^2+e^{-t\sqrt{n}}}.$$

1. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0;1]$ vers une fonction f que l'on explicitera.
2. Justifier pourquoi $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément sur $[0;1]$.
3. La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle uniformément sur $]0;1[$?
4. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t$. Montrer que I_n admet une limite lorsque $n \to +\infty$ et la calculer explicitement.

Exercice 4. ($\simeq$ 3.5 points) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{x^{7n}}{1+\ln(n)x^{2n}}.$$

Déterminer le domaine de convergence simple de la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$.

Exercice 5. ($\simeq$ 3.5 points)Soit la fonction d'une variable réelle $f : x \longmapsto \dfrac{x}{(1-3x^2)^{\frac{1}{3}}}$.

1. Montrer que f est développable en série entière en 0 et expliciter son développement (on le donnera sous la forme la plus simplifiée possible).
2. Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ par valeurs inférieures.
3. En déduire le rayon de convergence de la série entière associée au développement de f en 0.

Exercice 6. ($\simeq$ 8.5 points)

On note R le rayon de convergence de la série entière d'une variable réelle $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n(2-i)^{2n+1}}{n!(2n)!}x^{2n}$ et g sa fonction somme. Pour x réel, on pose, lorsque cela a un sens, $h(x) = g(x)e^{-x}$.

1. Soit $p \in \mathbb{N}$, on considère la fonction $\varphi_p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi_p(x) = x^p e^{-x}$.
   (a) Montrer que la fonction φ_p est intégrable sur $\mathbb{R}^+$. L'est-elle sur $\mathbb{R}^-$?
   (b) On note $I_p = \displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi_p(x)\,\mathrm{d}x$. Montrer que $I_p = p!$.
2. Déterminer R.
3. La série entière étudiée converge-t-elle normalement sur $]-R; R[$?
4. Montrer que h est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
5. Montrer que la fonction h est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et calculer explicitement $\displaystyle\int_0^{+\infty} h(x)\,\mathrm{d}x$.

Correction de l'examen final (session 1) d'analyse 3 de 2024-2025

Correction de l'exercice 1

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $(-1)^n u_n = -\dfrac{2n+1}{n(n+1)} \leq 0$ donc la série $\sum u_n$ est une série alternée. De plus, $|u_n| = \dfrac{2n+1}{n(n+1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{2n}{n^2} = \dfrac{2}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Enfin, soit $n \in \mathbb{N}^*$, alors

$$|u_n| - |u_{n+1}| = \frac{2n+1}{n(n+1)} - \frac{2n+3}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+2)(2n+1) - n(2n+3)}{n(n+1)(n+2)} = \frac{2n+2}{n(n+1)(n+2)} \geq 0$$

donc la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante. Par le critère des séries alternées, on en déduit que la série $\sum u_n$ converge.

Par ailleurs, on a vu que $|u_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{2}{n}$. Le critère de Riemann permet d'affirmer la divergence de la série $\sum \dfrac{1}{n}$ et a fortiori celle de $\sum \dfrac{2}{n}$ (puisque $2 \neq 0$), donc par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum |u_n|$ est divergente. Ainsi, la série numérique $\sum u_n$ est bien semi-convergente.

2. Considérons la fraction rationnelle $F(X) = \dfrac{2X+1}{X(X+1)}$. Le degré de son numérateur étant strictement inférieur à celui de son dénominateur, sa décomposition en éléments simples est de la forme $F(X) = \dfrac{a}{X} + \dfrac{b}{X+1}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$. En évaluant $XF(X)$ en 0, on trouve $a = 1$ et en évaluant $(X+1)F(X)$ en -1, il vient $b = 1$ aussi. Ainsi, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$,

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} u_n = \sum_{n=1}^{N} (-1)^{n-1}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right) = \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{(-1)^{n-1}}{n} - \frac{(-1)^n}{n+1}\right) = \frac{(-1)^0}{1} - \frac{(-1)^N}{N+1}$$

par télescopage. La somme demandée vaut donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \lim_{N\to+\infty} S_N = \lim_{N\to+\infty}\left(1 - \frac{(-1)^N}{N+1}\right) = 1.$$

Correction de l'exercice 2

1. Remarquons que pour $x \in]0; 1/2]$, $0 = \arcsin(0) < \arcsin(x) < \arcsin\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\pi}{6}$ (par stricte croissance de la fonction arcsin) et $1 - x^2 > 0$, donc la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1}{\arcsin(x)\sqrt{1-x^2}\ln(\arcsin(x))}$ est continue sur $]0; 1/2]$ en tant qu'inverse d'une fonction continue ne s'annulant pas. On effectue le changement de variable $u = \arcsin(x)$, alors $\mathrm{d}u = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$ et l'intégrale étudiée est de même nature que l'intégrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{u(\ln u)^2}\,\mathrm{d}u$$

qui est une intégrale de Bertrand. La fonction de Bertrand $u \longmapsto \dfrac{1}{u^\lambda |\ln u|^\mu}$ est intégrable sur $]0; \pi/6]$ si, et seulement si, $\lambda < 1$, ou ($\lambda = 1$ et $\mu > 1$). Comme on est dans le cas $\lambda = 1$ et $\mu = 2$, la fonction $\dfrac{1}{u(\ln u)^2}$ est intégrable sur $]0; \pi/6]$ donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{u(\ln u)^2}\,\mathrm{d}u$ converge, ce qui démontre la convergence de l'intégrale étudiée.

2. Posons $g : [2; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(t) = \dfrac{-5}{a^t + t^a\sqrt{t}}$. Pour tout $t \geq 2$, $a^t + t^a\sqrt{t} = e^{t\ln(a)} + t^{a+1/2} > 0$, donc la fonction g est continue sur $[2; +\infty[$, à valeurs négatives. Par conséquent, la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ équivaut à l'intégrabilité de g sur $[2; +\infty[$. La continuité de g garantit son intégrabilité sur tout segment inclus dans $[2; +\infty[$. De plus, lorsque $t \to +\infty$,

$$a^t + t^a\sqrt{t} = e^{t\ln(a)} + t^{a+1/2} \underset{t\to+\infty}{\sim} t^{a+1/2}$$

car $a^t \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ puisque $\ln(a) < 0$ et $t^{a+1/2} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ puisque $a + 1/2 > 0$. On en déduit que

$$g(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{-5}{t^{a+1/2}}.$$

Or la fonction de Riemann $t \longmapsto \dfrac{1}{t^{a+1/2}}$ est intégrable sur $[2;+\infty[$ si, et seulement si, $a + \dfrac{1}{2} > 1$, ce qui équivaut à $a > \dfrac{1}{2}$. Par comparaison de fonctions, la fonction g est donc intégrable sur $[2;+\infty[$ si, et seulement si $a > \dfrac{1}{2}$. On a donc démontré que l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ converge si, et seulement si $a \in \left]\dfrac{1}{2};1\right[$.

Correction de l'exercice 3

1. Soit $t_0 \in [0;1]$ (fixé). Si $t_0 \in]0;1[$, alors d'une part $t^{3n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et d'autre part, $-t\sqrt{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$. Par opérations sur les limites, on en déduit que

$$f_n(t_0) = \frac{1+\sin(t_0^{3n})}{1+t_0^2+e^{-t\sqrt{n}}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{1+t_0^2}.$$

Si $t_0 = 0$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(t_0) = \dfrac{1}{2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{2}$. Enfin, si $t_0 = 1$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(t_0) = \dfrac{1+\sin(1)}{2+e^{-\sqrt{n}}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1+\sin(1)}{2}$. Ainsi, la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0;1]$ vers la fonction $f : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} \text{ si } t = 0, \\ \dfrac{1}{1+t^2} \text{ si } t \in]0;1[, \\ \dfrac{1+\sin(1)}{2} \text{ si } t = 1. \end{cases}$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue sur $[0;1]$ en tant que quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas (car $1 + t^2 + e^{-t\sqrt{n}} \geq 1 > 0$). Par ailleurs, la fonction limite simple f n'est pas continue sur $[0;1]$, puisque l'on a par exemple

$$\lim_{t\to 0^+} f(t) = \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{1+t^2} = 1 \neq f(0).$$

Si la suite de fonctions $(f_n)_n$ convergeait uniformément sur $[0;1]$, ce serait vers la fonction f. La convergence uniforme préservant la continuité, f devrait être continue sur $[0;1]$ ce qui est contradictoire, donc $(f_n)_n$ ne converge pas uniformément sur $[0;1]$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in]0;1[$, on a

$$|f_n(t) - f(t)| = \left|\frac{1+\sin(t^{3n})}{1+t^2+e^{-t\sqrt{n}}} - \frac{1}{1+t^2}\right| = \left|\frac{(1+t^2)\sin(t^{3n}) - e^{-t\sqrt{n}}}{(1+t^2)(1+t^2+e^{-t\sqrt{n}})}\right|$$

Posons, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $t_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, alors $t_n \in]0;1[$ donc sous réserve d'existence de la borne supérieure ci-dessus,

$$\|f_n - f\|_{\infty;]0;1[} = \sup_{t\in]0;1[} |f_n(t) - f(t)| \geq |f_n(t_n) - f(t_n)| = \left|\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}^{3n}}\right) - e^{-1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}+e^{-1}\right)}\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{e^{-1}}{1+e^{-1}} > 0$$

car $\sqrt{n}^{3n} = e^{3n\ln(\sqrt{n})} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc $\sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}^{3n}}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Par conséquent, $\|f_n - f\|_{\infty;]0;1[}$ ne tend pas vers 0 lorsque $n \to +\infty$, donc la suite de fonctions $(f_n)_n$ ne converge pas uniformément (vers f) sur $]0;1[$.

4. • Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue, donc continue par morceaux, sur $]0;1[$.

- La suite de fonctions $(f_n)_n$ converge simplement vers la fonction f sur $]0;1[$, qui est continue, donc continue par morceaux, sur $]0;1[$.
- Soient $n \in \mathbb{N}$ et $t \in]0;1[$, comme $e^{-t\sqrt{n}} \geq 0$, on a $1 + t^2 e^{-t\sqrt{n}} \geq 1 + t^2 > 0$, et ainsi, par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$, $0 \leq \dfrac{1}{1+t^2+e^{-t\sqrt{n}}} \leq \dfrac{1}{1+t^2}$, d'où par inégalité triangulaire

$$|f_n(t)| = \frac{\left|1+\sin(t^{3n})\right|}{\left|1+t^2+e^{-t\sqrt{n}}\right|} \leq \frac{1+|\sin(1)|}{1+t^2+e^{-t\sqrt{n}}} \leq \frac{2}{1+t^2} := \varphi(t)$$

avec $\varphi :]0;1[\longrightarrow \mathbb{R}^+$ continue, et prolongeable par continuité sur $[0;1]$, donc intégrable sur le segment $[0;1]$.

Par le théorème de convergence dominée, les fonctions f_n et f sont intégrables sur $]0;1[$ (ce qui garantit la convergence des intégrales intervenant ci-dessous), et

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = \int_0^1 \lim_{n\to+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = [\arctan(t)]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

Correction de l'exercice 4 On cherche le domaine de convergence simple de la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$, c'est-à-dire l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ pour lesquels la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n(x)$ est convergente. Soit $x \in \mathbb{R}$ (fixé).

- Si $|x| > 1$, alors $\ln(n)x^{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc

$$|f_n(x)| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{|x|^{7n}}{\ln(n)\,|x|^{2n}} = \frac{|x|^{5n}}{\ln(n)} = \frac{e^{5n\ln(|x|)}}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

par croissances comparées. Ainsi, $|f_n(x)|$ ne tend pas vers 0 lorsque $n \to +\infty$, donc $f_n(x)$ non plus. Par conséquent, la série numérique $\sum f_n(x)$ diverge grossièrement.

- Si $|x| < 1$, alors par croissances comparées encore, $\ln(n)x^{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, ce qui entraîne

$$|f_n(x)| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{|x|^{7n}}{1} = \left(|x|^7\right)^n$$

Or la série géométrique $\sum \left(|x|^7\right)^n$ est convergente car la valeur absolue de sa raison $|x|^7$ est strictement inférieure à 1, donc par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum |f_n(x)|$ converge. Par conséquent, la série numérique $\sum f_n(x)$ converge (absolument).

- Si $|x| = 1$, alors $x \in \{-1;1\}$. Si $x = 1$, alors $f_n(x) = \dfrac{1}{1+\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\ln(n)} \geq \dfrac{1}{n} \geq 0$ (en effet, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln(x) \leq x$ puisque la fonction $g : x \longmapsto x - \ln(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, de dérivée $g' : x \longmapsto 1 - 1/x$ négative sur $]0;1]$ et positive sur $[1;+\infty[$, donc g admet un minimum en 1 qui vaut $g(1) = 1 \geq 0$, ainsi g est à valeurs positives). Par la règle de Riemann et comparaison de séries à termes positifs, on en déduit que $\sum f_n(1)$ diverge.

  Si $x = -1$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = \dfrac{(-1)^{7n}}{1+\ln(n)(-1)^{2n}} = \dfrac{(-1)^n}{1+\ln(n)}$. Comme $\dfrac{1}{1+\ln(n)} \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, la série $\sum f_n(-1)$ est une série alternée. De plus, $|f_n(-1)| = \dfrac{1}{1+\ln(n)}$ tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$, et la suite $(|f_n(-1)|)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante par croissance de la fonction ln sur $\mathbb{R}_+^*$ et décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$. Par le critère des séries alternées, la série $\sum f_n(-1)$ converge.

Finalement, le domaine de convergence simple de la série de fonctions $\sum f_n$ est $[-1;1[$.

Correction de l'exercice 5

1. Tout d'abord, puisque la fonction racine cubique est définie sur $\mathbb{R}$, le terme $f(x)$ est défini si, et seulement si, $1-3x^2 \neq 0$, donc f est définie sur $D = \mathbb{R}\backslash\left\{-\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$. Soit $x \in D$, alors

$$f(x) = x(1-3x^2)^{-\frac{1}{3}} = x(1+u)^{-\frac{1}{3}} \qquad \text{avec } u = -3x^2.$$

Or par les développements en séries entières usuels, on sait que

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \forall t \in]-1;1[, \quad (1+t)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(\alpha - k)}{n!} t^n.$$

Par ailleurs,

$$|u| < 1 \iff 3x^2 < 1 \iff x \in \left]-\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right[.$$

Ainsi, pour tout $x \in \left]-\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right[$,

$$\begin{aligned} f(x) &= x \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\prod_{k=0}^{n-1}\left(-\frac{1}{3} - k\right)}{n!}(-3x^2)^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \prod_{k=0}^{n-1}(1+3k)}{3^n n!}(-1)^n 3^n x^{2n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(3k+1)}{n!} x^{2n+1} \end{aligned}$$

ce qui démontre que f est développable en série entière en 0.

2. Lorsque $x \to \frac{1}{\sqrt{3}}^-$, on a $3x^2 \to 1^-$, donc $1-3x^2 \to 0^+$, ce qui entraîne que $f(x)$ tend vers $+\infty$.
3. Notons R le rayon de convergence de la série entière associée au développement de f en 0. Puisque l'on a démontré dans la question 1 que le domaine de convergence simple de cette série entière contient $\left]-\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right[$, on sait déjà que $R \geq \frac{1}{\sqrt{3}}$. Supposons par l'absurde que $R > \frac{1}{\sqrt{3}}$, alors la somme S de la série entière est continue (même de classe $\mathcal{C}^\infty$) sur $]-R;R[$, donc en particulier sur $\left[-\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$. Comme f coïncide avec S sur $\left]-\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right[$, cela entraîne que f se prolonge par continuité en $\frac{1}{\sqrt{3}}$, ce qui est impossible puisque l'on a montré dans la question précédente qu'elle tend vers $+\infty$ en $\frac{1}{\sqrt{3}}^-$. Finalement, R ne peut pas être strictement supérieur à $\frac{1}{\sqrt{3}}$ donc $R = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Correction de l'exercice 6

1. (a) La fonction φ_p est continue sur $\mathbb{R}^+$, donc intégrable sur tout segment inclus dans $\mathbb{R}^+$. De plus, par croissances comparées, $x^2\varphi_p(x) = x^{p+2}e^{-x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $\varphi(x) = \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)$. Par la règle de Riemann, la fonction $x \longmapsto \frac{1}{x^2}$ est intégrable sur $[1;+\infty[$, donc il en est de même de φ_p par comparaison. Ainsi, φ_p est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

Comme $|\varphi_p(x)| \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} +\infty$, il existe $A \in \mathbb{R}^-$ tel que, pour tout $x \in]-\infty; A]$, $|\varphi_p(x)| \geq 1 = \dfrac{1}{x^0} \geq 0$. Par comparaison de fonctions positives, la règle de Riemann entraîne que $|\varphi_p|$ (et donc φ_p) n'est pas intégrable sur $]-\infty; A]$, et donc a fortiori sur $\mathbb{R}^-$.

(b) Soit $p \in \mathbb{N}$, par intégration par parties généralisée avec les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ $u : x \longmapsto x^{p+1}$ et $v : x \longmapsto -e^{-x}$, justifiée par la convergence de l'intégrale I_p ainsi que par l'existence de limites finies en 0^+ et $+\infty$ de la fonction uv, on trouve :

$$I_{p+1} = \int_0^{+\infty} x^{p+1}e^{-x}\,\mathrm{d}x = \underbrace{\left[-x^{p+1}e^{-x}\right]_0^{+\infty}}_{=0-0} + \int_0^{+\infty} (p+1)x^p e^{-x}\,\mathrm{d}x = (p+1)I_p$$

Par récurrence immédiate, on en déduit que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $I_p = p!I_0$ avec

$$I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-x}\,\mathrm{d}x = \left[-e^{-x}\right]_0^{+\infty} = 1 \quad \text{d'où} \quad I_p = p!.$$

2. Il s'agit ici d'une série entière lacunaire. Soit $x \in \mathbb{R}$, posons $u_n(x) = \dfrac{(-1)^n(2-i)^{2n+1}x^{2n}}{n!(2n)!}$. Si $x \neq 0$, alors $|u_n(x)| > 0$ et

$$\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \frac{|2-i|^{2n+3}|x|^{2n+2}}{(n+1)!(2n+2)!}\frac{n!(2n)!}{|2-i|^{2n+1}|x|^{2n}} = \frac{5|x|^2}{(n+1)(2n+2)(2n+1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 < 1.$$

Par la règle de d'Alembert pour les séries numériques, la série $\sum u_n(x)$ converge donc absolument pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ (en fait aussi pour $x = 0$ car tous les termes sont nuls), donc $R = +\infty$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|u_n(x)| = \dfrac{\sqrt{5}^{2n+1}}{n!(2n)!}\left|x^{2n}\right|$ ce qui montre que $|u_n(x)|$ tend vers $+\infty$ lorsque $x \to +\infty$. Ainsi, la fonction u_n n'est pas bornée sur $]-R; R[= \mathbb{R}$, donc la série entière $\sum u_n$ ne peut pas converger normalement sur $]-R; R[$.

4. Par le cours sur les séries entières, la fonction somme g de la série entière étudiée est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R; R[= \mathbb{R}$. Comme la fonction $x \longmapsto e^{-x}$ est aussi de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, par produit, h est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ aussi.

5. Puisque h est la somme de la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ où $f_n : x \longmapsto \dfrac{(-1)^n(2-i)^{2n+1}x^{2n}}{n!(2n)!}e^{-x}$, essayons d'utiliser le théorème d'intégration terme à terme (étudier la convergence uniforme de la série de fonctions ne servirait à rien ici puisque l'on intègre sur un intervalle qui n'est pas un segment).
   - Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue sur $\mathbb{R}^+$, donc continue par morceaux sur $\mathbb{R}^+$. De plus, $|f_n| = \dfrac{\sqrt{5}^{2n+1}}{n!(2n)!}\varphi_{2n}$ et la fonction φ_{2n} est intégrable sur $\mathbb{R}^+$, donc il en est de même de $|f_n|$ et ainsi de f_n.
   - La série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ donc en particulier sur $\mathbb{R}^+$ vers la fonction h, qui est continue, donc c.p.m. sur $\mathbb{R}^+$ (en effet, on a vu que la série entière dont g est la fonction somme a un rayon de convergence infini, donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sum f_n(x)$ converge).
   - . Soit $n \in \mathbb{N}$, alors

$$\int_0^{+\infty} |f_n(x)|\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{5}^{2n+1}}{n!(2n)!}\varphi_{2n}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{5}^{2n+1}}{n!(2n)!}I_{2n} = \frac{\sqrt{5}^{2n+1}}{n!}$$

   On applique alors par exemple la règle de d'Alembert sur les séries numériques pour montrer que la série numérique $\int_0^{+\infty} |f_n(x)|\,\mathrm{d}x$ converge ou on remarque que $\sum \dfrac{\sqrt{5}^{2n+1}}{n!} = \sqrt{5}\sum \dfrac{5^n}{n!}$ et on utilise la convergence de la série donnant l'exponentielle.

Par le théorème d'intégration terme à terme, la fonction h est donc intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} h(x)\,\mathrm{d}x &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (2-i)^{2n+1}}{n!(2n)!} \int_0^{+\infty} \varphi_{2n}(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (2-i)^{2n+1}}{n!} \\
&= (2-i) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-(2-i)^2)^n}{n!} \\
&= (2-i)e^{-(2-i)^2} \\
&= (2-i)e^{-3+4i}
\end{aligned}$$