Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre d'automne 2022-2023

Algèbre 3 Durée : 1 heure 30

Session 2 - Examen final du 26 juin 2023

Aucun document et aucune calculatrice ne sont autorisés durant l'épreuve. L'usage des téléphones est prohibé. La justification des réponses et un soin particulier de la présentation seront demandés et pris en compte lors de la notation.

Les 4 exercices sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre.

Questions de cours :

1. Énoncer avec précision le Lemme des noyaux.
2. Donner la forme générale des solutions du système différentiel $X'(t) = AX(t) + V(t)$ où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et X, V sont deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Exercice 1. Les deux questions sont indépendantes.

1. Soient λ, μ deux réels et $A(\lambda, \mu)$ la matrice :

$$A(\lambda,\mu) = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & \mu \\ -1 & \mu & \lambda \\ 1+\lambda+\mu & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

   (a) Calculer, **sous forme factorisée**, le déterminant de $A(\lambda, \mu)$.

   (b) Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur λ et μ pour que la matrice $A(\lambda, \mu)$ soit inversible.

2. Soient $\omega \in \mathbb{C}$ et $M(\omega)$ la matrice :

$$M(\omega) = \begin{pmatrix} 1 & \omega & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & \ddots & \omega \\ \omega & 0 & & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$$

   (a) Calculer le déterminant de $M(\omega)$.

   (b) Déterminer en fonction de ω le rang de la matrice $M(\omega)$.

Exercice 2. Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ une matrice telle que :

$$A^3 - A^2 + A = I_3, \qquad A \neq I_3.$$

1. Montrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.
2. Montrer que A admet au moins une valeur propre réelle.
3. On note $\pi_A \in \mathbb{R}[X]$ le polynôme minimal de A. Déterminer π_A.
4. La matrice A est-elle diagonalisable (resp. trigonalisable) dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?
5. Calculer la trace et le déterminant de A.

Exercice 3. Soit A la matrice $\begin{pmatrix} -4 & -6 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer le polynôme caractéristique de A. En déduire que la matrice est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
2. Diagonaliser A en donnant explicitement une matrice de passage.
3. Calculer A^n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
4. On considère les suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par leur premier terme u_0, v_0 et w_0 et les relations suivantes :
$$\left\{ \begin{array}{rcl} u_{n+1} & = & -4u_n - 6v_n \\ v_{n+1} & = & 3u_n + 5v_n \\ w_{n+1} & = & 3u_n + 6v_n + 5w_n \end{array} \right.$$
pour $n \geq 0$.
   (a) Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le système précédent sous forme d'une équation matricielle faisant intervenir la matrice A.
   (b) En déduire u_n, v_n et w_n en fonction de n et des termes u_0, v_0 et w_0.

Exercice 4. Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses. On démontrera le résultat dans le cas où l'assertion est vraie, et on donnera un contre-exemple détaillé dans le cas où l'assertion est fausse.

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si $\lambda \in \mathbb{C}$ est une valeur propre de A, alors $\overline{\lambda}$ est aussi valeur propre de A.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Si A^2 est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, alors A est aussi diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.
3. Si u est un endomorphisme diagonalisable d'un espace vectoriel E, les sous-espaces de E stables par u sont exactement les sous-espaces propres de u.
4. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. L'exponentielle de A est $\exp(A) = \begin{pmatrix} \cos(1) & -\sin(1) \\ \sin(1) & \cos(1) \end{pmatrix}$.