Université Claude Bernard - Lyon 1 — Semestre d'automne 2024-2025

Algèbre 3 - Cursus prépa — Durée : 2 heures

Examen final du 10 janvier 2025

Aucun document et aucune calculatrice ne sont autorisés durant l'épreuve. L'usage des téléphones est prohibé. La justification des réponses et un soin particulier de la présentation seront demandés et pris en compte lors de la notation.Les 4 exercices sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre.

Le barème (sur 28 *points) est uniquement indicatif et tient compte de la longueur du sujet.*

Exercice 1. ($\simeq$ 8.5 points) Soient $m \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} m & 2 & 2 \\ 2 & 2 & m \\ 2 & m & 2 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer le polynôme caractéristique de A sous forme factorisée dans $\mathbb{R}[X]$.
2. Montrer que le spectre de A ne peut pas être réduit à un seul élément.
3. Déterminer l'ensemble des $m \in \mathbb{R}$ pour lesquels le spectre de A comporte exactement 2 éléments.
4. Déterminer l'ensemble des $m \in \mathbb{R}$ pour lesquels la matrice A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
5. On suppose dans cette question que $m = -1$. Déterminer explicitement A^n pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.
6. Déterminer toutes les suites réelles $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left\{ \begin{array}{l} x_{n+1} = -2x_n + 4y_n + 4z_n \\ y_{n+1} = 4x_n + 4y_n - 2z_n \\ z_{n+1} = 4x_n - 2y_n + 4z_n \end{array} \right.$$
et $x_0 = y_0 = 0$ et $z_0 = 1$.

Exercice 2. ($\simeq$ 8.5 points) Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 4 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ une base de E. Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & -3 & 0 \\ 5 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f + 2\,\mathrm{Id}_E)$. Que peut-on en déduire sur le polynôme caractéristique χ_f de f ?
2. On admet qu'il existe deux réels a et b distincts tels que $\chi_f = (X-a)^2(X-b)^2$. Déterminer a et b.
3. Justifier que f est trigonalisable et déterminer une base de E dans laquelle la matrice de f, que l'on notera T, est triangulaire supérieure. On donnera T comme la somme d'une matrice diagonale D et d'une matrice nilpotente N qui commutent entre elles. On donne pour ceci
$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 8 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (A - I_4)^2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -6 & 0 \\ -9 & 0 & -9 & 0 \\ 6 & 0 & 15 & 0 \\ -12 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad (A + 2I_4)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 21 & 9 & 15 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 18 & 0 & 9 & 9 \end{pmatrix}.$$
4. Résoudre le système différentiel
$$(S) : \forall t \in \mathbb{R}, \quad \left\{ \begin{array}{l} x'(t) = -x(t) + z(t) \\ y'(t) = 5x(t) + y(t) + 4z(t) + u(t) \\ z'(t) = -x(t) - 3z(t) \\ u'(t) = 5x(t) + 2z(t) + u(t) \end{array} \right.$$
d'inconnues $x, y, z, u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivables.

Exercice 3. ($\simeq$ 2.5 points) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note $\overline{A} = (\overline{a_{i,j}})_{1\leq i,j\leq n}$ et on suppose que ${}^tA = -\overline{A}$.

1. Montrer que $\det\left(\overline{A}\right) = \overline{\det(A)}$.
2. Montrer que le déterminant de A est réel si n est pair, et imaginaire pur si n est impair.

Exercice 4. ($\simeq$ 8.5 points) Soient n un entier supérieur ou égal à 5 et E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ non diagonalisable tel que :

$$f^3 = 4f^2 - 4f \quad \text{et} \quad \mathrm{Tr}(f) = 8.$$

1. Montrer que f est trigonalisable.
2. Montrer que f possède exactement deux valeurs propres et préciser leurs multiplicités algébriques respectives.
3. Déterminer le polynôme minimal de f.
4. Pour $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$, on note m_λ la multiplicité algébrique de λ. Soit $k \in [\![1; m_\lambda]\!]$. Donner sans justification une inclusion entre $\mathrm{Ker}((f-\lambda\,\mathrm{Id}_E)^k)$ et l'espace caractéristique de f associé à λ. En déduire une inégalité entre $\dim \mathrm{Ker}((f-\lambda\,\mathrm{Id}_E)^k)$ et m_λ.
5. Montrer que $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Ker}((f-2\,\mathrm{Id}_E)^2)$ sont supplémentaires dans E, et à l'aide de la question précédente, déterminer leurs dimensions respectives.
6. On considère une base $\mathcal{B}$ de E adaptée à la décomposition $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Ker}((f-2\,\mathrm{Id}_E)^2)$. Justifier que la matrice M de f dans la base $\mathcal{B}$ est diagonale par blocs de la forme
$$M = \begin{pmatrix} M_1 & (0) \\ (0) & M_2 \end{pmatrix}$$
où M_1 est à expliciter, et rappeler le lien entre M_2 et un endomorphisme induit par f sur un sous-espace vectoriel de E bien choisi.
7. Montrer qu'il existe une matrice $N \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ nilpotente d'indice de nilpotence 2 telle que $M_2 = 2I_4 + N$.

Correction de l'examen final (session 1) d'algèbre 3 de 2024-2025

Correction de l'exercice 1

1. En additionnant toutes les colonnes dans la première, puis en retranchant la première ligne aux deux suivantes, on trouve :

$$\chi_A = \det(XI_3 - A) = \begin{vmatrix} X-m & -2 & -2 \\ -2 & X-2 & -m \\ -2 & -m & X-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X-m-4 & -2 & -2 \\ X-m-4 & X-2 & -m \\ X-m-4 & -m & X-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X-m-4 & -2 & -2 \\ 0 & X & 2-m \\ 0 & 2-m & X \end{vmatrix}$$

d'où en développant selon la première colonne

$$\chi_A = (X-m-4)\begin{vmatrix} X & 2-m \\ 2-m & X \end{vmatrix} = (X-(m+4))(X^2-(2-m)^2) = (X-(m+4))(X-(2-m))(X-(m-2))$$

2. Le spectre (réel) de A est égal à l'ensemble des racines (réelles) de χ_A, donc $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{m+4, 2-m, m-2\}$. Les réels $m+4$ et $m-2$ ne peuvent pas être égaux, sinon on aurait $4 = -2$, donc le spectre de A contient toujours au moins 2 éléments.

3. Comme $m+4 \neq m-2$, le spectre de A comporte exactement deux éléments si, et seulement si,

$$m+4 = 2-m \text{ ou } 2-m = m-2 \iff 2m = -2 \text{ ou } 2m = 4 \iff m \in \{-1; 2\}.$$

4.
   - Si $m \notin \{-1; 2\}$, alors les 3 racines de χ_A sont deux à deux distinctes, donc χ_A est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$. Par conséquent, A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
   - Si $m = 2$, alors $\chi_A = (X-6)X^2$ est scindé sur $\mathbb{R}$. Pour $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, notons m_λ la multiplicité algébrique de λ et $E_\lambda = \mathrm{Ker}(A - \lambda I_3)$ l'espace caractéristique associé. On sait que $1 \leq \dim E_\lambda \leq m_\lambda$. Ainsi, on a $1 \leq \dim E_6 \leq m_6 = 1$, donc $\dim E_6 = 1$. De plus, par le théorème du rang,

   $$\dim E_0 = 3 - \mathrm{rang}(A - 0I_3) = 3 - \mathrm{rang}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = 3 - 1 = 2 = m_0$$

   puisque toutes les colonnes de A sont identiques et non nulles. Ainsi, pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, $\dim E_\lambda = m_\lambda$ donc A est diagonalisable.
   - Si $m = -1$, alors $\chi_A = (X-3)^2(X+3)$. Pour la même raison que ci-dessus, $\dim E_{-3} = 1 = m_{-3}$. De plus,

   $$\mathrm{rang}(A - 3I_3) = \mathrm{rang}\begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} = 1 \text{ car } L_1 = -2L_2 \text{ et } L_2 = L_3 \neq (0)$$

   Par le théorème du rang, on en conclut que $\dim E_3 = 2$, et ainsi

   $$\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A)} \dim E_\lambda = \dim E_{-3} + \dim E_3 = 3 = \dim M_{3,1}(\mathbb{R})$$

   donc A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

   Finalement, la matrice A est diagonalisable pour tout $m \in \mathbb{R}$.

5. Dans le cas $m = -1$, on a vu que $\mathrm{Sp}(A) = \{-3; 3\}$.
   - Méthode 1 : De plus, comme dans la matrice $A - 3I_3$, $C_1 = -2C_2$ et $C_2 = C_3$, les vecteurs

   $$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

appartiennent à E_3. Comme ils sont non colinéaires, la famille (e_1, e_2) est une famille libre d'éléments de E_3, de cardinal $2 = \dim E_3$, donc il s'agit d'une base de E_3. De même, E_{-3} est de dimension 1, et dans la matrice $A+3I_3$, on remarque que $C_2+C_3 = 2C_1$ donc le vecteur $e_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ appartient à E_{-3}, et comme il est non nul, c'est une base de E_{-3}. Puisque A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) = E_3 \oplus E_{-3}$ donc la concaténation $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Si l'on note P la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ à la base $\mathcal{B}$, on obtient alors

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = D \quad \text{avec} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

On en déduit que $A = PDP^{-1}$. On montre par récurrence immédiate que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$ et il reste à faire le calcul explicite de ce produit matriciel, après avoir calculé P^{-1}...

- Méthode 2 : Comme A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, son polynôme minimal π_A est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$. Par ailleurs, π_A est unitaire et possède exactement les mêmes racines que χ_A, donc $\pi_A = (X-3)(X+3)$. Soit $n \in \mathbb{N}$, par division euclidienne de X^n par π_A,

$$\exists (Q_n, R_n) \in \mathbb{R}[X]^2, \quad (*) \quad X^n = \pi_A Q_n + R_n \quad \text{avec } \deg(R_n) < \deg(\pi_A) = 2.$$

Par conséquent, il existe $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ tels que $R_n = a_n + b_n X$. En évaluant $(*)$ successivement en 3 et en -3, on en déduit :

$$\begin{cases} 3^n = a_n + 3b_n \\ (-3)^n = a_n - 3b_n \end{cases} \iff \begin{cases} a_n = \frac{1}{2}(3^n + (-3)^n) \\ (-3)^n = a_n - 3b_n \end{cases} \text{en ayant effectué } L_1 \leftarrow L_1 + L_2$$
$$\iff \begin{cases} a_n = \frac{1}{2}(3^n + (-3)^n) \\ b_n = \frac{1}{6}(3^n - (-3)^n) \end{cases}$$

En évaluant $(*)$ en A, on obtient finalement, puisque π_A est annulateur de A,

$$\begin{aligned} A^n &= \pi_A(A)Q_n(A) + R_n(A) \\ &= a_n I_3 + b_n A \\ &= \frac{1}{2}(3^n + (-3)^n)I_3 + \frac{1}{6}(3^n - (-3)^n)A \\ &= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2.3^n + 4(-3)^n & 2(3^n - (-3)^n) & 2(3^n - (-3)^n) \\ 2(3^n - (-3)^n) & 5.3^n + (-3)^n & -3^n + (-3)^n \\ 2(3^n - (-3)^n) & -3^n + (-3)^n & 5.3^n + (-3)^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

6. Soient $(x_n)n, (y_n)_n$ et $(z_n)_n$ 3 suites réelles. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$ de sorte que

$$\begin{aligned} (x_n)_n, (y_n)_n \text{ et } (z_n)_n \text{ vérifient le système donné} &\iff \forall n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & -2 \\ 4 & -2 & 4 \end{pmatrix} X_n \\ &\iff \forall n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = 2AX_n \\ &\iff \forall n \in \mathbb{N}, X_n = 2^n A^n X_0. \end{aligned}$$

où A est la matrice de l'énoncé obtenue dans le cas $m = -1$. Par ailleurs, les conditions initiales données sont équivalentes à $X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ainsi, $(x_n)_n, (y_n)_n$ et $(z_n)_n$ sont solutions du problème posé si, et seulement si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n est égal à la troisième colonne de la matrice A^n calculée à la question précédente multipliée par 2^n, ce qui équivaut à

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \begin{cases} x_n = \dfrac{2^{n+1}}{6}(3^n - (-3)^n) \\ y_n = \dfrac{2^n}{6}(-3^n + (-3)^n) \\ z_n = \dfrac{2^n}{6}(5.3^n + (-3)^n) \end{cases}$$

Correction de l'exercice 2

1. Soit $x \in E$, il existe $(x_1, \ldots, x_4) \in \mathbb{R}^4$ tel que $x = \displaystyle\sum_{k=1}^{4} x_k e_k$. On a :

$$\begin{aligned}
x \in \operatorname{Ker}(f + 2\operatorname{Id}_E) &\iff \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker}(A + 2I_4) \\
&\iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 5 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 0 \\ 5x_1 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x_3 = -x_1 \\ x_2 = 0 \\ x_4 = -x_1 \end{cases} \\
&\iff x = x_1 e_1 - x_1 e_3 - x_1 e_4
\end{aligned}$$

Ainsi, $\operatorname{Ker}(f + 2\operatorname{Id}_E) = \{x_1(e_1 - e_3 - e_4) \mid x_1 \in \mathbb{R}\} = \operatorname{Vect}\{e_1 - e_3 - e_4\}$. Comme le vecteur $e_1 - e_3 - e_4$ n'est pas nul (par liberté de la famille $\mathcal{B}$), la famille $(e_1 - e_3 - e_4)$ est une base de $\operatorname{Ker}(f + 2\operatorname{Id}_E)$. Puisque $\dim \operatorname{Ker}(f + 2\operatorname{Id}_E) = 1 \neq 0$, on en déduit que -2 est une valeur propre de f de multiplicité algébrique supérieure ou égale à 1. Ainsi, le polynôme $X - 2$ divise χ_f.

2. On voit grâce à la deuxième colonne de A que $f(e_2) = 1e_2$. Puisque $e_2 \neq 0_E$, on en déduit que 1 est aussi valeur propre de f. Comme par hypothèse $\operatorname{Sp}(f) = \{a; b\}$ et que l'on vient de démontrer que $\{-2; 1\} \subset \operatorname{Sp}(f)$, on peut conclure que $a = -2$ et $b = 1$ (ou réciproquement, par symétrie des rôles de a et b).

3. Comme χ_f est scindé sur $\mathbb{R}$, f est trigonalisable. Notons, pour $\lambda \in \operatorname{Sp}(f)$, $E_\lambda = \operatorname{Ker}(f - \lambda \operatorname{Id}_E)$ l'espace propre associé et $F_\lambda = \operatorname{Ker}((f - \lambda \operatorname{Id}_E)^2)$ l'espace caractéristique associé (puisque les deux valeurs propres sont de multiplicité algébrique 2). Déterminons une base de F_λ, sachant que cet espace vectoriel est de dimension $m_\lambda = 2$. Par les matrices données, comme les colonnes de $(A + 2I_4)^2$ vérifient $C_2 - C_3 + C_4$ est la colonne nulle, le vecteur $u_2 = e_2 - e_3 + e_4$ appartient à F_{-2}. L'inclusion $E_{-2} \subset F_{-2}$ donne par ailleurs $u_1 = e_1 - e_3 - e_4 \in F_{-2}$. La famille (u_1, u_2) est donc une famille libre d'éléments de F_{-2} (car les deux vecteurs ne sont pas colinéaires), de cardinal $2 = \dim F_{-2}$. Ainsi, (u_1, u_2) est une base de F_{-2}. De même, comme les colonnes 2 et 4 de la matrice $(A - I_4)^2$ sont nulles, les vecteurs e_2 et e_4 appartiennent à F_1. La famille (e_2, e_4) est donc une famille libre maximale de F_1, donc une base de F_1.

   Le caractère trigonalisable de f entraîne $E = F_{-2} \oplus F_1$, ainsi la concaténation $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, e_2, e_4)$ est une base de E. On a par construction $f(u_1) = -2u_1$ et $f(e_2) = e_2$. De plus, par calcul matriciel,

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{donc } f(u_2) = -u_1 - 2u_2.$$

De même, on a directement $f(e_4) = e_2 + e_4$ ce qui entraîne que la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$ est

$$T = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = D + N \text{ où } D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } N = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Puisque N est triangulaire supérieure stricte, N est nilpotente, et par calculs par blocs, $N^2 = 0_{\mathcal{M}_4(\mathbb{R})}$. De plus, si l'on écrit $N = \begin{pmatrix} N_1 & (0) \\ (0) & N_2 \end{pmatrix}$ avec N_1 et N_2 dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, puisque $D = \begin{pmatrix} -2I_2 & (0) \\ (0) & I_2 \end{pmatrix}$, alors

$$DN = \begin{pmatrix} -2I_2N_1 & (0) \\ (0) & I_2N_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_1(-2I_2) & (0) \\ (0) & N_2I_2 \end{pmatrix} = ND$$

donc T est bien de la forme voulue.

4. Soient $x, y, z, u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivables. On pose $X : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \\ u(t) \end{pmatrix}$$

alors X est aussi dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée donnée par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad X'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \\ u'(t) \end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} x, y, z \text{ et } u \text{ sont solutions de } (S) \quad &\iff \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad X'(t) = \begin{pmatrix} -x(t) + z(t) \\ 5x(t) + y(t) + 4z(t) + u(t) \\ -x(t) - 3z(t) \\ 5x(t) + 2z(t) + u(t) \end{pmatrix} \\ &\iff \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad X'(t) = AX(t) \\ &\iff \quad \exists X_0 \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R}), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad X(t) = e^{tA}X_0. \end{aligned}$$

Soit $t \in \mathbb{R}$, puisque les matrices tD et tN commutent, on sait déjà que $e^{tT} = e^{tD+tN} = e^{tD}e^{tN}$. Puisque tD est une matrice diagonale, par le cours,

$$e^{tD} = \begin{pmatrix} e^{-2t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^t \end{pmatrix}$$

De plus, comme N^2 est nulle, toutes les puissances de N supérieures à 2 sont aussi nulles, ce qui entraîne

$$e^{tN} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(tN)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{1} \frac{t^kN^k}{k!} = I_4 + tN$$

d'où

$$e^{tT} = \begin{pmatrix} e^{-2t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-2t} & -te^{-2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^t & te^t \\ 0 & 0 & 0 & e^t \end{pmatrix}$$

Finalement, par formule de changement de base,

$$T = P^{-1}AP \text{ où } P = \text{Pass}_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et ainsi $e^{tA} = \exp(P.tT.P^{-1}) = Pe^{tT}P^{-1}$. On obtient donc :

$$\begin{aligned}
& x, y, z \text{ et } u \text{ sont solutions de } (S) \\
\iff \quad & \exists X_0 \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R}), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad X(t) = Pe^{tT}P^{-1}X_0 \\
\iff \quad & \exists Y_0 \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R}), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad X(t) = Pe^{tT}Y_0 \quad (\text{en posant } Y_0 = P^{-1}X_0) \\
\iff \quad & \exists \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad X(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-2t} & -te^{-2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^t & te^t \\ 0 & 0 & 0 & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} \\
\iff \quad & \exists \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad X(t) = \begin{pmatrix} e^{-2t} & -te^{-2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t} & e^t & te^t \\ -e^{-2t} & te^{-2t} - e^{-2t} & 0 & 0 \\ -e^{-2t} & te^{-2t} + e^{-2t} & 0 & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} \\
\iff \quad & \exists \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \left\{ \begin{array}{l} x(t) = \alpha e^{-2t} - \beta te^{-2t} \\ y(t) = \beta e^{-2t} + \gamma e^t + \delta te^t \\ z(t) = -\alpha e^{-2t} + \beta(te^{-2t} - e^{-2t}) \\ u(t) = -\alpha e^{-2t} + \beta(te^{-2t} + e^{-2t}) + \delta e^t \end{array} \right.
\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 3

1. Par définition du déterminant,

$$\begin{aligned}
\det\left(\overline{A}\right) &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} \overline{a_{\sigma(i),i}} \\
&= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \overline{\prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i}} \text{ par conjugué d'un produit} \\
&= \overline{\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i}} \\
&= \overline{\det(A)}
\end{aligned}$$

puisque $\varepsilon(\sigma) \in \{\pm 1\}$ pour toute permutation σ donc $\overline{\varepsilon(\sigma)} = \varepsilon(\sigma)$, et puisque le conjugué d'une somme est la somme des conjugués.

2. On en déduit que

$$\det(A) = \det({}^tA) = \det(-\overline{A}) = (-1)^n \det\left(\overline{A}\right) = (-1)^n \overline{\det(A)}.$$

Ainsi, si n est pair, alors $\det(A) = \overline{\det(A)}$ donc $\det(A) \in \mathbb{R}$. Si n est impair, alors $\det(A) = -\overline{\det(A)}$. Comme $\det(A) \in \mathbb{C}$, il existe deux réels a et b tels que $\det(A) = a + ib$. L'égalité ci-dessus se réécrit alors en $a + ib = -a + ib$ ce qui équivaut à $a = 0$ et ainsi $\det(A) = ib$ est un imaginaire pur.

Correction de l'exercice 4

1. L'égalité $f^3 = 4f^2 - 4f$ équivaut à $f^3 - 4f^2 + 4f = 0_{\mathcal{L}(E)}$ donc le polynôme $P = X^3 - 4X^2 + 4X$ est annulateur de f. Comme on peut factoriser P en $P = X(X^2 - 4X + 4) = X(X-2)^2$, P est scindé sur $\mathbb{R}$, ce qui entraîne que f est trigonalisable.

2. Le spectre de f est inclus dans l'ensemble des racines (réelles) de P, ainsi $\mathrm{Sp}(f) \subset \{0; 2\}$. Par ailleurs, comme f est trigonalisable, on sait que la somme des valeurs propres de f comptées avec multiplicité algébrique est

égale à la trace de f. Si l'on note m_0 et m_2 les multiplicités algébriques respectives de 0 et 2 (éventuellement nulles si 0 ou 2 n'appartient pas au spectre), on obtient alors

$$m_0 0 + m_2 2 = \mathrm{Tr}(f) = 8 \iff m_2 = 4.$$

Par ailleurs, comme f est trigonalisable, son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{R}$, donc la somme des multiplicités de ses racines est égale à $\dim(E) = n$, ce qui entraîne, puisque ses racines constituent $\mathrm{Sp}(f)$, que $m_0 + m_2 = n$. Ainsi, $m_0 = n - 4 \geq 1$ puisque $n \geq 5$. On en déduit que $\mathrm{Sp}(f) = \{0; 2\}$ avec $m_0 = n - 4$ et $m_2 = 4$.

On aurait aussi pu utiliser une base de trigonalisation de f : comme f est trigonalisable, il existe une base $\mathcal{B}'$ de E dans laquelle la matrice de f est une matrice triangulaire supérieure de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et ses éléments diagonaux appartiennent à $\mathrm{Sp}(f)$. Avec les notations ci-dessus, m_0 de ces termes diagonaux valent 0, et m_2 des autres valent 2, ce qui entraîne nécessairement $m_0 + m_2 = n$, $8 = \mathrm{Tr}(f) = m_0 0 + m_2 2$ et $\chi_f = X^{m_0}(X-2)^{m_2} = X^{n-4}(X-2)^4$ donnant ainsi le spectre (puisque $n - 4 \geq 1$) et les multiplicités respectives des valeurs propres 0 et 2.

3. Le polynôme minimal π_f de f divise tout polynôme annulateur de f, donc il divise P. De plus, il est unitaire, et l'ensemble de ses racines dans $\mathbb{R}$ est égal à $\mathrm{Sp}(f)$. Ainsi, π_f appartient à $\{X(X-2); X(X-2)^2\}$. Par ailleurs, f est non diagonalisable, donc son polynôme minimal ne peut pas être scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$, donc $\pi_f = X(X-2)^2$.

4. Comme k est un entier inférieur à m_λ, on sait que $\mathrm{Ker}((f - \lambda\,\mathrm{Id}_E)^k) \subset \mathrm{Ker}((f - \lambda\,\mathrm{Id}_E)^{m_\lambda}) = F_\lambda$ où F_λ désigne le sous-espace caractéristique associé à λ. Comme celui-ci est de dimension m_λ par le cours, on en déduit que $\dim \mathrm{Ker}((f - \lambda\,\mathrm{Id}_E)^k) \leq \dim F_\lambda = m_\lambda$.

5. Les polynômes X et $(X-2)^2$ sont premiers entre eux (en effet, les seuls diviseurs unitaires de X sont 1 et X, et parmi eux, seul 1 divise $(X-2)^2$). On peut donc appliquer le Lemme des noyaux :

$$\mathrm{Ker}(f \circ (f - 2\,\mathrm{Id}_E)^2) = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Ker}((f - 2\,\mathrm{Id}_E)^2).$$

Comme $f \circ (f - 2\,\mathrm{d}_E)^2 = P(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}$, $\mathrm{Ker}(f \circ (f - 2\,\mathrm{d}_E)^2) = E$, ce qui montre que $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Ker}((f - 2\,\mathrm{Id}_E)^2)$ sont supplémentaires dans E.

Par conséquent, $\dim \mathrm{Ker}(f) + \dim \mathrm{Ker}((f - 2\,\mathrm{Id}_2)^2) = \dim(E) = n$. La question précédente donnait aussi les deux inégalités $\dim \mathrm{Ker}(f) \leq m_0 = n - 4$ et $\dim \mathrm{Ker}((f - 2\,\mathrm{Id}_E)^2) \leq m_2 = 4$, donc la seule possibilité pour que leur somme vaille n est $\dim \mathrm{Ker}(f) = n - 4$ et $\dim \mathrm{Ker}((f - 2\,\mathrm{Id}_E)^2) = 4$.

Remarque : si on ne nous demandait pas d'utiliser la question précédente, on pourrait argumenter directement par le cours à l'aide du polynôme minimal de f. Puisque $\pi_f = X(X-2)^2$, si l'on note $\alpha_0 = 1$ et $\alpha_2 = 2$ les multiplicités respectives de 0 et 2 en tant que racines de π_f, on sait que pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$, l'espace vectoriel $G_\lambda = \mathrm{Ker}((f - \lambda\,\mathrm{Id}_E)^{\alpha_k})$ est égal à l'espace caractéristique de f et est de dimension m_λ. Ainsi, $\mathrm{Ker}(f) = G_0$ est de dimension $m_0 = n - 4$ et $\mathrm{Ker}((f - 2\,\mathrm{Id}_E)^2) = G_2$ est de dimension $m_2 = 4$.

6. Puisque les sous-espaces vectoriels $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Ker}((f - 2\,\mathrm{Id}_E)^2)$ sont des noyaux de polynômes en f qui commutent avec f, ils sont stables par f. Par conséquent, si l'on note la base adaptée $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ comme la concaténation de la base $\mathcal{B}_1$ de $G_0 = \mathrm{Ker}(f)$ et de la base $\mathcal{B}_2$ de $G_2 = \mathrm{Ker}((f - 2\,\mathrm{Id}_E)^2)$, la matrice de f dans $\mathcal{B}$ est diagonale par blocs de la forme

$$M = \begin{pmatrix} M_1 & (0) \\ (0) & M_2 \end{pmatrix} \text{ avec } M_1 = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1}(f_{G_0}) \in \mathcal{M}_{n-4}(\mathbb{R}) \text{ et } M_2 = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_2}(f_{G_2}) \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$$

où f_{G_2} désigne l'endomorphisme induit par f sur G_2. Comme l'image par f d'un élément de $\operatorname{Ker}(f)$ est nulle, on peut affirmer que $M_1 = 0_{\mathcal{M}_{n-4}(\mathbb{R})}$ (car pour tout $x \in \mathcal{B}_1$, $f_{G_0}(x) = f(x) = 0_E$).

7. Par définition, pour tout $x \in G_2 = \operatorname{Ker}((f - 2\operatorname{Id}_E)^2)$, on a $(f_{G_2} - 2\operatorname{Id}_{G_2})^2(x) = (f - 2\operatorname{Id}_E)^2(x) = 0_E$. Ainsi, si l'on note $N = M_2 - 2I_4$, alors

$$N^2 = (M - 2I_4)^2 = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_2}\left((f_{G_2} - 2\operatorname{Id}_{G_2})^2\right) = 0_{\mathcal{M}_4(\mathbb{R})}$$

ce qui démontre que $M_2 = 2I_4 + N$ avec N nilpotente d'indice de nilpotence inférieure ou égale à 2 (on aurait aussi pu utiliser le calcul par blocs et le polynôme P annulateur de f pour montrer que N^2 est nulle). En outre, on ne peut pas avoir $N = 0$, sinon $M_2 = 2I_4$ entraînerait que $M = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est diagonale, ce qui contredit l'hypothèse que f est non diagonalisable. Finalement, N est donc d'indice de nilpotence exactement 2.