1) Les couples (x,y) des coordonnées des images des trois complexes proposés vérifient tous trois l'équation : $y = x+1$

2) Un seul cercle passe par 1, i et -1 : le cercle $\{z \mid |z| = 1\}$. Il ne passe pas par $1+i$.

3) $$2i\, e^{i\frac{\varphi+\psi}{2}} \sin\left(\frac{\varphi-\psi}{2}\right) = e^{i\frac{\varphi+\psi}{2}}\left(e^{i\frac{\varphi-\psi}{2}} - e^{i\frac{\psi-\varphi}{2}}\right)$$
$$= e^{i\varphi} - e^{i\psi}$$

4) Soit α, β, γ et δ réels distincts modulo 2π, ce qui entraîne que $e^{i\alpha}, e^{i\beta}, e^{i\gamma}$ et $e^{i\delta}$ sont distincts

$$B(e^{i\alpha}, e^{i\beta}, e^{i\gamma}, e^{i\delta}) = \frac{e^{i\gamma} - e^{i\alpha}}{e^{i\beta} - e^{i\gamma}} \times \frac{e^{i\beta} - e^{i\delta}}{e^{i\delta} - e^{i\alpha}} = \frac{2i\, e^{i\frac{\alpha+\gamma}{2}} \sin\left(\frac{\gamma-\alpha}{2}\right)}{2i\, e^{i\frac{\beta+\gamma}{2}} \sin\left(\frac{\beta-\gamma}{2}\right)} \times \frac{2i\, e^{i\frac{\beta+\delta}{2}} \sin\left(\frac{\beta-\delta}{2}\right)}{2i\, e^{i\frac{\delta+\alpha}{2}} \sin\left(\frac{\delta-\alpha}{2}\right)}$$

$$= \frac{e^{i\frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{2}}}{e^{i\frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{2}}} \frac{\sin\left(\frac{\gamma-\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\beta-\delta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\beta-\gamma}{2}\right)\sin\left(\frac{\delta-\alpha}{2}\right)} = \frac{\sin\left(\frac{\gamma-\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\beta-\delta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\beta-\gamma}{2}\right)\sin\left(\frac{\delta-\alpha}{2}\right)} \in \mathbb{R}$$

5) a) Soit $a, b, c \in \mathbb{C}$ distincts, soit $v \in \mathbb{C}$, soit $q \in \mathbb{C}^*$

$$S(a+v, b+v, c+v) = \frac{(c+v)-(a+v)}{(b+v)-(c+v)} = \frac{c-a}{b-c} = S(a,b,c)$$

$$S(qa, qb, qc) = \frac{qc - qa}{qb - qc} = \frac{q(c-a)}{q(b-c)} = \frac{c-a}{b-c} = S(a,b,c)$$

b) Soit $a, b, c, d \in \mathbb{C}^*$ distincts

$$B\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \frac{1}{d}\right) = \frac{\frac{1}{c} - \frac{1}{a}}{\frac{1}{b} - \frac{1}{c}} \times \frac{\frac{1}{b} - \frac{1}{d}}{\frac{1}{d} - \frac{1}{a}} = \frac{\frac{a-c}{ac} \times \frac{d-b}{bd}}{\frac{c-b}{bc} \times \frac{a-d}{ad}}$$

$$= \frac{(a-c)(d-b)}{(c-b)(a-d)} = \frac{(c-a)(b-d)}{(b-c)(d-a)} = B(a,b,c,d)$$

6) a) Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{a,b\}$ Notons A l'image de a, B celle de b, P celle de z

Alors a, b, z alignés $\Leftrightarrow$ les vecteurs $\overrightarrow{AP}$ et $\overrightarrow{BP}$ sont proportionnels

$\Leftrightarrow$ il existe un λ réel tel que $\overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{BP}$

$\Leftrightarrow$ il existe un λ réel tel que $z - a = \lambda(z-b)$

$\Leftrightarrow \dfrac{z-a}{z-b} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \dfrac{z-a}{b-z} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow S(a,b,z) \in \mathbb{R}$

b) Par le a) on sait déjà que $S(a,b,c) \in \mathbb{R}$

Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{a,b,c\}$

Alors a, b, c, z alignés $\Leftrightarrow a, b, z$ alignés $\Leftrightarrow S(a,b,z) \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \dfrac{S(a,b,c)}{S(a,b,z)} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow B(a,b,c,z) \in \mathbb{R}$.

7) Remarquons préalablement que puisque B se calcule à partir de S, le 5 a) entraîne que pour tous a,b,c,d distincts, tout $v \in \mathbb{C}$, tout $q \in \mathbb{C}^*$

$B(a,b,c,d) = B(a+v, b+v, c+v, d+v)$
$= B(qa, qb, qc, qd)$

On peut alors manipuler :

$B(a,b,c,d) = B(a-1, b-1, c-1, d-1)$ (par le 5 a) avec $v = -1$)

$= B\left(\frac{1}{a-1}, \frac{1}{b-1}, \frac{1}{c-1}, \frac{1}{d-1}\right)$ (par le 5 b))

$= B\left(\frac{2}{a-1}, \frac{2}{b-1}, \frac{2}{c-1}, \frac{2}{d-1}\right)$ (par le 5 a) avec $q = 2$)

$= B\left(1+\frac{2}{a-1}, 1+\frac{2}{b-1}, 1+\frac{2}{c-1}, 1+\frac{2}{d-1}\right) = B(f(a), f(b), f(c), f(d))$ (par le 5 a) avec $v = 1$)

8) Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$

Alors $f(z) \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow f(z) = -\overline{f(z)} \Leftrightarrow \dfrac{z+1}{z-1} = -\dfrac{\bar{z}+1}{\bar{z}-1} \Leftrightarrow (z+1)(\bar{z}-1) = -(z-1)(\bar{z}+1)$

$\Leftrightarrow 2z\bar{z} - 2 = 0 \Leftrightarrow |z|^2 = 1 \Leftrightarrow |z| = 1$

9) a) Comme $|a| = |b| = |c| = 1$, le 8) permet de conclure que $f(a) \in i\mathbb{R}$, $f(b) \in i\mathbb{R}$ et $f(c) \in i\mathbb{R}$

De plus f est injective donc $f(a)$, $f(b)$ et $f(c)$ sont trois points alignés distincts

Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{a, b, c, 1\}$. On a alors :

$|z| = 1 \iff f(z) \in i\mathbb{R}$ (par le 8)

$\iff f(a), f(b), f(c)$ et $f(z)$ alignés

$\iff B(f(a), f(b), f(c), f(z)) \in \mathbb{R}$ (par le 6 b))

$\iff B(a, b, c, z) \in \mathbb{R}$ (par le 7)

b) Soit q de module 1 avec $q \neq 1$, $q \neq \bar{a}$, $q \neq \bar{b}$ et $q \neq \bar{c}$

Alors $|qa| = |qb| = |qc| = |q|$, les quatre nombres qa, qb, qc et q sont distincts (puisque a, b, c et 1 le sont). On déduit du a) appliqué à ces quatre nombres que $B(qa, qb, qc, q) \in \mathbb{R}$

Or, par le 5 a), $B(qa, qb, qc, q) = B(a, b, c, 1)$.

c) Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{a, b, c\}$

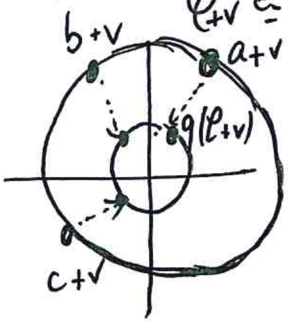
* si $z \neq 1$, l'équivalence est vraie par le a)
* si $z = 1$, les deux énoncés reliés par le "$\iff$" sont tous deux vrais : celui de gauche par b), celui de droite de façon évidente. L'équivalence est donc vraie.

10) a) Pensons géométrique ! Soit A, B et C les images de a, b et c.
Comme AB et BC sont distinctes mais sécantes, elles n'ont pas la même direction. Les médiatrices de [A,B] et [B,C] non plus, par conséquent. Elles se coupent donc en un point, équidistant de A, B et C. Ceci fournit un cercle $\mathcal{C}$ passant par ces trois points.

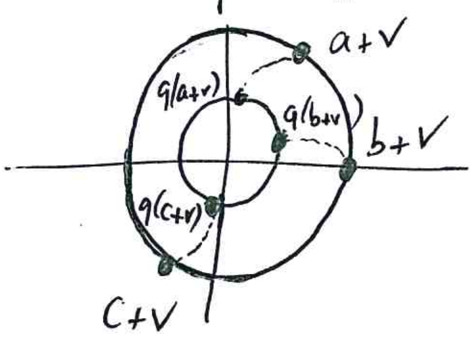
b) Si on prend pour v l'opposé [illegible] du centre de $\mathcal{C}$, déplacer chaque point de $\mathcal{C}$ en lui ajoutant v translate $\mathcal{C}$, jusqu'à ramener son centre en 0

c) En général, on prendra pour q l'inverse du rayon de $\mathcal{C}$; si par malheur l'un des trois nombres $a+v$, $b+v$ ou $c+v$ est réel strictement positif on sera plus subtil et on utilisera $\frac{e^{i\theta}}{r}$ pour θ à peu près pifométrique de façon à faire tourner $\mathcal{C}+v$ tout en modifiant son rayon :

$\mathcal{C}+v$ En général



Cas particulier



d) Soit $z \in \mathbb{C}$

$z \in \mathcal{C} \iff |q(z+v)| = 1$ par le c)

$\iff B(q(a+v), q(b+v), q(c+v), q(z+v)) \in \mathbb{R}$ par 9c)

$\iff B(a+v, b+v, c+v, z+v) \in \mathbb{R}$ par 5a)

$\iff B(a, b, c, z) \in \mathbb{R}$ par 5a)

11) a) Si ρ était égal à r, $\mathcal{C}$ passerait par 0.

b) En suivant la suggestion. Soir $z \in \mathcal{C}$: il existe donc un $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = \omega + re^{i\theta}$

Alors $|z|^2 = (\omega + re^{i\theta})(\bar{\omega} + re^{-i\theta}) = |\omega|^2 + r(\omega e^{-i\theta} + \bar{\omega} e^{i\theta}) + r^2$

$= \rho^2 + 2r \,\mathrm{Re}(\omega e^{-i\theta}) + r^2$

$\geq \rho^2 - 2r|\omega e^{-i\theta}| + r^2 = \rho^2 - 2r|\omega| + r^2$

$= \rho^2 - 2\rho r + r^2 = (\rho - r)^2$ puis on applique $\sqrt{\ }$ à cette inégalité

ou encore plus court : $z = \omega + (z - \omega)$ et on applique l'inégalité triangulaire dans sa version un peu savante (minoration) : $\big||\omega| - |z-\omega|\big| \leq |\omega + (z-\omega)|$

qui donne : $|\rho - r| \leq |z|$ directement.

c) Si $w \in \mathcal{C}'$ il existe $z \in \mathcal{C}$ avec $w = \frac{1}{z}$. Autrement dit, $\frac{1}{w} = z \in \mathcal{C}$

Par a) et b) on sait que $0 < |r - \rho| \leq \left|\frac{1}{w}\right|$. On inverse et ça marche.

d) Soit $w \in \mathbb{C}^*$. Alors $w \in \mathcal{C}' \iff \exists z \in \mathcal{C}$ avec $w = \frac{1}{z}$

$\iff \frac{1}{w} \in \mathcal{C}$

$\iff \frac{1}{w} = a$ ou $\frac{1}{w} = b$ ou $\frac{1}{w} = c$ ou $B(a,b,c,\frac{1}{w}) \in \mathbb{R}$ (par 10 c))

$\iff w = \frac{1}{a}$ ou $w = \frac{1}{b}$ ou $w = \frac{1}{c}$ ou $B(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}, w) \in \mathbb{R}$ (par 5 b))

e) Supposons $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$ et $\frac{1}{c}$ alignés et notons Δ la droite qui passe par ces points. En rapprochant 6 b) et 11 d) on voit que, si $0 \notin \Delta$, $\mathcal{C}' = \Delta$ et que si $0 \in \Delta$, $\mathcal{C}' = \Delta \cap \mathbb{C}^* = \Delta \setminus \{0\}$. Dans les deux cas, $\mathcal{C}'$ contient des points de module arbitrairement grand. Ce qui contredit c).

C'est donc que $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$ et $\frac{1}{c}$ n'étaient pas alignés

f) Supposons $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$ et 0 pas cocycliques et notons $\mathcal{C}''$ le cercle passant par $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$ et $\frac{1}{c}$ (il existe par rapprochement de e) et 10) a))

Par 10) d), $\mathcal{C}'' = \{w \in \mathbb{C} \mid B(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}, w) \in \mathbb{R}\} \cup \{a, b, c\}$. Comme $0 \notin \mathcal{C}''$ par hypothèse, on a aussi $\mathcal{C}'' = \{w \in \mathbb{C}^* \mid B(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}, w) \in \mathbb{R}\} \cup \{a, b, c\}$ Vu d), $\mathcal{C}' = \mathcal{C}''$ donc $\mathcal{C}'$ est un cercle

g) On aura gagné si on montre que 0, $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$ et $\frac{1}{c}$ ne sont pas cocycliques... Si vous avez lu jusque là vous êtes motivé : cherchez encore !