1) a) Facile

b) Les points sensibles sont les continuités à droite en n et en $2n$. On les vérifie en étudiant les comportements de f au voisinage de ces points : quand $x \to n^+$, $f(x) \to -1/n^2 + 2/n = 1/n = f(n)$, tandis que quand $x \to (2n)^+$, $f(x) \to 0 = f(2n)$.
Pour le calcul de l'intégrale, on remarque d'abord que $\int_0^{+\infty} g_n(x)\,dx = \int_0^{2n} g_n(x)\,dx$. Vu le graphe de g_n il s'agit ici de l'aire d'un triangle de base $2n$ et de hauteur $1/n$: c'est donc $\frac{1}{2} \cdot (2n) \cdot \frac{1}{n} = 1$.

c) g_n croît sur $[0, n]$, décroît ensuite et est à valeurs positives. On en déduit que $\|g_n\|_\infty = g_n(n) = 1/n$. On constate alors que $\|g_n\|_\infty$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$: c'est exactement la convergence uniforme.
Non, puisque la limite de l'intégrale vaut 1 alors que l'intégrale de la limite vaut 0.

2) a) Pour chaque $a > 0$, f est continue sur $[0, a]$ comme limite uniforme de fonctions continues. Soit $x_0 \geq 0$: f étant continue sur l'intervalle $[0, 2x_0 + 1]$, elle l'est en x_0.
Par passage à la limite dans l'encadrement $0 \leq |f_n| \leq g$, on obtient : $0 \leq |f| \leq g$, ce qui entraîne l'intégrabilité de f sur $\mathbf{R}^+$.

b) Puisque g est intégrable sur $\mathbf{R}^+$, l'intégrale généralisée de g converge en $+\infty$, ce qui signifie en particulier que : $\int_0^t g(x)\,dx \to \int_0^{+\infty} g(x)\,dx$ quand $t \to +\infty$.
Or $\int_0^t g(x)\,dx = \int_0^{+\infty} g(x)\,dx - \varphi(t)$. On en déduit que $\varphi(t) \to 0$ quand $t \to +\infty$.
Si on applique alors la définition de “tendre vers zéro” à φ, on en déduit l'existence d'un $A > 0$ tel que la condition $t \geq A$ entraîne l'inégalité $|\varphi(t)| \leq \epsilon/5$. En particulier, $\varphi(A) < \epsilon/4$.
Soit alors un $n \geq 1$. On peut écrire :

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} |f_n(x) - f(x)|\,dx &= \int_0^{A} |f_n(x) - f(x)|\,dx + \int_A^{+\infty} |f_n(x) - f(x)|\,dx \\
&\leq \int_0^{A} |f_n(x) - f(x)|\,dx + \int_A^{+\infty} |f_n(x)|\,dx + \int_A^{+\infty} |f(x)|\,dx \\
&\leq \int_0^{A} |f_n(x) - f(x)|\,dx + 2\int_A^{+\infty} g(x)\,dx \\
&\leq \int_0^{A} |f_n(x) - f(x)|\,dx + \frac{\epsilon}{2}.
\end{aligned}$$

c) Soit $\epsilon > 0$. Soit A un réel associé à ϵ comme au b). Comme $(f_n - f)$ tend uniformément vers 0 sur $[0, A]$, il existe un $N \geq 1$ tel que pour tout $n \geq N$ et tout $x \in [0, A]$, $|f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon/2A$. Alors pour tout $n \geq N$,

$$\left| \int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx - \int_0^{+\infty} f(x)\,dx \right| \leq \int_0^{+\infty} |f_n(x) - f(x)|\,dx \leq \int_0^{A} \frac{\epsilon}{2A}\,dx + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

En faisant varier ϵ, on en déduit que $\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx \to \int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ quand $n \to +\infty$.

3) Pour $x \geq 1$, $0 \leq e^{-x^2} \leq e^{-x}$, et $x \mapsto e^{-x}$ est notoirement intégrable sur $\mathbf{R}^+$.

4) On calcule $\Psi'(t) = -\frac{t}{1-t}$ qui est négative au sens large sur $[0, 1[$. La fonction Ψ est donc décroissante sur cet intervalle. De plus $\Psi(0) = 0$ et la fonction Ψ est donc à valeurs négatives.

5) a) $I_0 = \dfrac{\pi}{2}$ et $I_1 = 1$.

b) Pour chaque n, la fonction intégrée est continue, positive, non identiquement nulle. Enfin les bornes sont rangées dans l'ordre. L'intégrale I_n est donc strictement positive.

6) Soit $n \geq 1$. On effectue une intégration par parties fondée sur $u(\theta) = \sin^n \theta$ et $v(\theta) = -\cos\theta$. Je ne tape pas les détails, ça aboutit sans difficulté.

7) Vu le 5b), pour tout $n \geq 1$ il est légitime de calculer le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)I_{n+1}}{nI_{n-1}} = 1$ au vu du 5)c). La suite est donc constante. Le 5)a) fournit la valeur $u_1 = \dfrac{\pi}{2}$ qui est donc pour tout $n \geq 1$ la valeur de u_n. D'où le résultat demandé.

8) a) Pour tout $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ et tout $n \geq 1$, $\sin^{n+1}\theta \leq \sin^n\theta \leq \sin^{n-1}\theta$. En intégrant ces inégalités sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ on obtient le résultat demandé.

b) Vu le 5) b) on peut diviser par I_{n-1} l'inégalité qui précède. On obtient :

$$\frac{I_{n+1}}{I_{n-1}} \leq \frac{I_n}{I_{n-1}} \leq 1$$

soit, au vu du 5 c) : $\frac{n}{n+1} \leq \frac{I_n}{I_{n-1}} \leq 1$.
En faisant alors tendre n vers $+\infty$, on constate que $\frac{I_n}{I_{n-1}} \to 1$ (gendarmes) qu'on peut dire autrement en écrivant que $I_n \sim I_{n-1}$.

c) Quand n tend vers l'infini, $I_n^2 \sim I_{n-1}I_n = \frac{\pi}{2n}$. Comme pour tout n, I_n est strictement positive, on en conclut que $I_n = \sqrt{I_n^2} \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

9) L'inégalité est évidente si $\sqrt{n} \leq x$. Supposons donc $x < \sqrt{n}$ et examinons :

$$\ln\left[\frac{f_n(x)}{f(x)}\right] = x^2 + n\ln\left(1 - \frac{x^2}{n}\right) = n\Psi\left(\frac{x^2}{n}\right) \leq 0$$

par la question 4). On en déduit que $f_n(x)/f(x) \leq 1$, soit $f_n(x) \leq f(x)$.

10) a) On fixe un x réel positif. Alors pour tout $n > x^2$, $f_n(x) = e^{n\ln(1-x^2/n)}$. Faisons tendre n vers l'infini. Dans cette expression on peut faire un développement limité à l'ordre 1 du logarithme. On obtient $f_n(x) = e^{n(\frac{-x^2}{n}+o(\frac{1}{n}))} = e^{o(1)}e^{-x^2} \to e^{-x^2} = f(x)$.

11) Par convergence de f_n vers f, d'une part simple et d'autre part dominée par la fonction intégrable f, $\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx$ tend vers $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ quand $n \to +\infty$. C'est le résultat demandé, dès lors qu'on remarque que f_n étant nulle sur $[\sqrt{n}, +\infty[$ son intégrale sur $\mathbf{R}^+$ peut se réécrire comme intégrale sur $[0, \sqrt{n}]$.

12) On fait le changement de variable $\theta = \text{Arccos}(x/\sqrt{n})$ donc $x = \sqrt{n}\cos\theta$ et $dx = -\sqrt{n}\,\sin\theta\,d\theta$.
Avec ce changement de variables :

$$\int_{x=0}^{x=\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n dx = -\sqrt{n}\int_{\theta=\pi/2}^{\theta=0} \sin\theta(1-\cos^2\theta)^n\,d\theta = \sqrt{n}\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1}\theta\,d\theta = \sqrt{n}\,I_{2n+1}.$$

13) Vu le 10), $I = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}I_{2n+1}$.
Or, quand n tend vers l'infini :

$$\sqrt{n}\,I_{2n+1} \sim \sqrt{n}\sqrt{\frac{\pi}{2(2n+1)}} \sim \sqrt{n}\sqrt{\frac{\pi}{4n}} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

D'où $I = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.