1) a) Notons λ un réel tel que pour tout $n \geq 0$, on ait $u_n = \lambda q^n$. Soit $n \geq 0$ un entier. On calcule $u_{n+1} - qu_n = \lambda q^{n+1} - q\lambda q^n = \lambda(q^{n+1} - q^{n+1}) = 0$ et on conclut que la suite (u_n) vérifie bien la condition qui définit $\mathcal{L}(-q)$.

b) On va montrer par récurrence sur l'entier n l'hypothèse :

$$(H_n) \qquad \text{“}v_n = v_0 q^n\text{”}.$$

* L'initialisation (H_0) est évidente.
* Soit $n \geq 0$ un entier, supposons (H_n). Comme la suite (v_k) est dans $\mathcal{L}(-q)$, on sait que $v_{n+1} - qv_n = 0$. On en déduit que $v_{n+1} = qv_n = qv_0q^n = v_0q^{n+1}$: l'hypothèse (H_{n+1}) est bien vérifiée.
Les deux items ci-dessus permettent de conclure à la véracité de (H_n) pour tout n.

c) Soit (u_n) une suite géométrique, et soit q une de ses raisons (elle n'en a qu'une mais pas besoin de le savoir). Alors, par le a), (u_n) est élément de $\mathcal{L}(-q)$ et donc de $\mathcal{L}_1$. Réciproquement, soit (v_n) un élément de $\mathcal{L}_1$. Soit alors un réel a tel que $(v_n) \in \mathcal{L}(a)$. Par le b) on conclut que v_n est géométrique de raison $-a$. L'ensemble $\mathcal{L}_1$ et l'ensemble des suites géométriques sont donc égaux, puisqu'inclus l'un dans l'autre.

2) Supposons que la suite proposée soit élément de $\mathcal{L}_1$. Il existerait alors un réel a tel que pour tout $n \geq 0$, on ait $u_{n+1} + au_n = 0$. Cette relation serait en particulier vraie pour $n = 0$ et pour $n = 1$ ce qui fournirait les relations respectives $2 + a = 0$ et $3 + 2a = 0$. Le réel a se révèlerait simultanément égal à -2 et à $-3/2$, ce qui n'est pas très raisonnable. C'est donc que cette suite n'est pas dans $\mathcal{L}_1$.

3) L'inclusion $\mathcal{M} \subset \mathcal{L}_1$ est fausse. Considérons la suite étudiée à la question précédente ; elle n'est pas élément de $\mathcal{L}_1$. En revanche, on vérifie sans mal qu'elle est élément de $\mathcal{M}$: soit en effet $n \geq 0$, en prenant $a = -u_{n+1}/u_n$ (qui a un sens car $u_n = n + 1$ n'est pas nul), on constate qu'il existe bien un a tel que $u_{n+1} + au_n = 0$.
L'inclusion $\mathcal{L}_1 \subset \mathcal{M}$ est en revanche vraie : d'une façon beaucoup plus générale, on peut toujours déduire un $\forall\exists$ du $\exists\forall$ correspondant.
Il n'est pas très difficile de voir qu'une suite est élément de $\mathcal{M}$ si elle a la propriété suivante : ou bien elle ne s'annule jamais, ou bien l'ensemble des indices où elle ne s'annule pas est un intervalle (éventuellement vide) de $\mathbf{N}$ de la forme $\{0, 1, \dots, n\}$. (On peut dire ça de plein d'autres façons, par exemple dire que si, un jour, u_n s'annule, elle ne se réveille plus jamais et reste nulle pour les siècles des siècles).

4) La réponse est oui pour (u_n) et (w_n) et non pour (v_n). Quand la réponse est "oui" ça se montre par un calcul facile qui est un cas particulier de celui de la question suivante et que je ne tape pas sur ce corrigé (il est attendu sur les copies, néanmoins !). Pour (v_n) on montrera que la réponse est "non" en calculant très explicitement $v_2 - 5v_1 + 6v_0 = 4 + 5 \times 2 + 6 \times 1 \neq 0$.

5) Soit n un entier. On calcule $u_{n+2} - 5u_{n+1} + 6u_n = (\lambda 2^{n+2} + \mu 3^{n+2}) - 5(\lambda 2^{n+1} + \mu 3^{n+1}) + 6(\lambda 2^n + \mu 3^n) = \lambda 2^n(4 - 5 \times 2 + 6) + \mu 3^n(9 - 5 \times 3 + 6) = 0 + 0 = 0$. Ce calcul prouve que (v_n) est bien dans $\mathcal{L}(-5, 6)$.

6) a) Le plus simple est peut-être de tâtonner au brouillon (soustraire la première équation à la deuxième est particulièrement recommandable) pour deviner des formules pour α et β puis assener ces formules au lecteur. C'est ce que je fais ici.
Choisissons $\alpha = 3v_0 - v_1$ et $\beta = v_1 - 2v_0$. On vérifie alors que $\alpha + \beta = (3v_0 - v_1) + (v_1 - 2v_0) = v_0$ et que $2\alpha + 3\beta = (6v_0 - 2v_1) + (3v_1 - 6v_0) = v_1$.

b) Dans l'intention de le montrer par “récurrence forte” et pour chaque $n \geq 0$, notons (H_n) l'énoncé : “$v_n = \alpha 2^n + \beta 3^n$”.
* On initialise ici pour $n = 0$ et aussi pour $n = 1$. Chacune des vérifications découle d'une des lignes du système qui figure au a).
* Soit ensuite un $n \geq 0$, et supposons que pour tout entier $k \in \{0, \dots, n + 1\}$ l'énoncé (H_k) est vérifié. Montrons (H_{n+2}).
Comme la suite (v_k) est dans $\mathcal{L}(-5, 6)$, on a en particulier $v_{n+2} = 5v_{n+1} - 6v_n$. Vu les hypothèses de récurrence (H_{n+1}) et (H_n) on en déduit que $v_{n+2} = 5(\alpha 2^{n+1} + \beta 3^{n+1}) - 6(\alpha 2^n + \beta 3^n) = \alpha 2^n(5 \times 2 - 6) + \beta 3^n(5 \times 3 - 6) = 4\alpha \times 2^n + 9\beta \times 3^n = \alpha 2^{n+2} + \beta 3^{n+2}$. Ceci prouve (H_{n+2}).
Les deux items qui précèdent assurent la véracité de (H_n) pour toute valeur de n.

7) a) Le plus sympathique est peut-être ici de remplacer les différents s_i ou c_i du système par leurs définitions, et de savoir de la trigonométrie élémentaire (formules pour le sinus et le cosinus d'un arc doublé), ou les reconstituer depuis les rappels offerts au lecteur.
On s'aperçoit qu'il est demandé de résoudre :

$$\begin{cases} \sin(2\theta) = a\sin\theta \\ \cos(2\theta) = a\cos\theta + b \end{cases}$$

Les réels $a = 2\cos\theta$ et $b = -1$ répondent manifestement au cahier des charges. Montrons l'unicité. Soit (a', b') un autre couple de réels qui y répond. La première équation entraîne que $a' = \sin(2\theta)/\sin\theta$ (la division est possible car les hypothèses spécifient que θ n'est pas multiple entier de π), donc $a' = a$; puis la deuxième équation donne $b' = c_2 - ac_1$, donc $b' = b$. Ceci prouve l'unicité.

b) L'astuce indispensable pour s'en tirer est de chercher à faire les deux récurrences regroupées en une seule.
Ainsi, n désignant un entier positif, il est judicieux de noter (H_n) l'énoncé suivant :

$$(H_n) \qquad s_{n+2} = as_{n+1} + bs_n \text{ et } c_{n+2} = ac_{n+1} + bc_n.$$

* L'initialisation, pour $n = 0$, découle de la définition de a et b : elle est obtenue à partir du système figurant au a).
* Pour l'hérédité, soit $n \geq 0$. Supposons (H_n).
On calcule alors $c_{n+3} = c_{n+2}c_1 - s_{n+2}s_1 = (ac_{n+1} + bc_n)c_1 - (as_{n+1} + bs_n)s_1 = a(c_{n+1}c_1 - s_{n+1}s_1) + b(c_nc_1 - s_ns_1) = ac_{n+2} + bc_{n+1}$. Le calcul de s_{n+3} est ni plus ni moins difficile et je ne le tape pas, le laissant au lecteur. On conclut finalement à la véracité de (H_{n+1}).
Les deux items qui précèdent garantissent la véracité de (H_n) pour tout n, ce qui répond exactement à la question.

c) Il suffit de s'apercevoir que le résultat du b) peut se redire autrement : on a montré que (s_n) et (c_n) sont toutes deux éléments de $\mathcal{L}(-a, -b)$. Par définition de $\mathcal{L}_2$ elles sont donc toutes deux éléments de $\mathcal{L}_2$.

8) a) Je n'ai pas envie de la taper... Il convient de réécrire les calculs faits au 5 (allégés d'ailleurs de leurs lettres grecques) en y remplaçant les "2" par des "-q", les "3" par des "-r", les "-5" par des "$q + r$", les "5" par des "$-q - r$" et les "6" par des "qr". Bon courage.

b) Soit (u_n) et (v_n) deux éléments de $\mathcal{L}_1$. Par définition de ce dernier ensemble, on peut introduire des réels q et r tels que $(u_n) \in \mathcal{L}(q)$ et $(v_n) \in \mathcal{L}(r)$. Par le a) on conclut que $(u_n) + (v_n) \in \mathcal{L}(q + r, qr)$ et donc que $(u_n) + (v_n) \in \mathcal{L}_2$.

9) On remarque que pour tout $n \geq 0$, $u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n = (n + 3) - 2(n + 2) + (n + 1) = 0$ et on en déduit que $(u_n) \in \mathcal{L}(-2, 1)$ et, a fortiori, que $(u_n) \in \mathcal{L}_2$.

10) Soit $n \geq 0$. On calcule alors $w_{n+k} + c_1w_{n+k-1} + \cdots + c_kw_n = (u_{n+k} + v_{n+k}) + c_1(u_{n+k-1} + v_{n+k-1}) + \cdots + c_k(u_n + v_n) = (u_{n+k} + c_1u_{n+k-1} + \cdots + c_ku_n) + (v_{n+k} + c_1v_{n+k-1} + \cdots + c_kv_n) = 0 + 0 = 0$.

11) a) Soit (u_n) une suite polynomiale de degré inférieur ou égal à 2. On introduit des réels a, b et c tels que pour tout $n \geq 0$, on ait : $u_n = an^2 + bn + c$. On fixe alors un $n \geq 0$ et on développe complètement le calcul de $u_{n+3} - 3u_{n+2} + 3u_{n+1} - u_n$ en remplaçant chacun des u_i qui y figure par sa définition. Il se passe la même chose qu'à la question 9 : tout se simplifie et il reste un bête zéro.

b) La suite (x_n) est somme de la suite (v_n) et de la suite (w_n) qui est définie par : pour chaque $n \geq 0$, $w_n = -\frac{(n-1)(n-2)}{2}v_0 + n(n-2)v_1 - \frac{n(n-1)}{2}v_2$. Cette suite (w_n) est polynomiale de degré inférieur ou égal à 2 donc, par le a), elle est élément de $\mathcal{L}(-3, 3, 1)$. Comme somme de deux éléments de $\mathcal{L}(-3, 3, -1)$, la suite (x_n) est alors également élément de $\mathcal{L}(-3, 3, -1)$.
Une fois cette remarque faite, on va montrer l'hypothèse "$x_n = 0$" (que l'on notera (H_n)) par récurrence sur n. On initialise en vérifiant à la main, depuis la formule compliquée qui définit (x_n), que $x_0 = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = 0$. Une fois ceci fait, l'hérédité est facile à montrer comme suit : soit $n \geq 0$, supposons que pour tout entier k compris entre 0 et $n+2$ au sens large on ait $x_k = 0$. Alors $x_{n+3} = 3x_{n+2} - 3x_{n+1} + x_n = 3 \times 0 - 3 \times 0 + 0 = 0$.

c) Au a), on a montré que l'ensemble des suites polynomiales de degré inférieur ou égal à 2 était inclus dans $\mathcal{L}(-3,3,-1)$. Au b), on a montré que, si on partait d'une suite (v_n) élément de $\mathcal{L}(-3,3,-1)$, il se révélait que pour tout $n \geq 0$, $v_n = \frac{(n-1)(n-2)}{2}v_0 - n(n-2)v_1 + \frac{n(n-1)}{2}v_2$ et donc que (v_n) est polynomiale de degré inférieur ou égal à 2 ; et on a donc montré l'inclusion de $\mathcal{L}(-3,3,-1)$ dans l'ensemble des suites polynomiales de degré inférieur ou égal à 2. Ceci montre l'égalité ensembliste requise.

12) a) On espère que vous écrirez que $\mathcal{P}_4 = \mathcal{L}(-4,6,-4,1)$.

b) Ça devrait mieux marcher si on calcule de gauche à droite : soit n un entier. Alors $v_{n+3} - 3v_{n+2} + 3v_{n+1} - v_n = (u_{n+4} - u_{n+3}) - 3(u_{n+3} - u_{n+2}) + 3(u_{n+2} - 3u_{n+1}) - (u_{n+1} - u_n) = u_{n+4} - 4u_{n+3} + 6u_{n+2} - 4u_{n+1} + u_n$. On déduit de ce calcul que $\forall n, v_{n+3} - 3v_{n+2} + 3v_{n+1} - v_n = 0 \iff \forall n, u_{n+4} - 4u_{n+3} + 6u_{n+2} - 4u_{n+1} + u_n = 0$ et donc que $(v_n) \in \mathcal{P}_3 \iff (u_n) \in \mathcal{P}_4$.

c) Soit (u_n) une suite polynomiale de degré inférieur ou égal à 3, soit a, b, c et d quatre réels tels que pour tout $n \geq 0$, on ait : $u_n = an^3 + bn^2 + cn + d$ et soit (v_n) comme à la question précédente. On constate que pour tout $n \geq 0$, $v_n = a(n+1)^3 - an^3 + b(n+1)^2 - bn^2 + c(n+1) - cn + d - d = a(3n^2 + 3n + 1) + b(n+1)^2 - bn^2 + c(n+1) - cn + d - d$ donc que (v_n) est une suite polynomiale de degré inférieur ou égal à 2. On déduit du 11 a) que (v_n) est un élément de $\mathcal{P}_3$, puis du b) qui précède que (u_n) est un élément de $\mathcal{P}_4$.

d) Peu de chance que vous vous y soyez frottés en temps limité, essayez donc à la maison ; si vous avez fait des efforts raisonnables j'écrirai peut-être le corrigé.

13) a) Il y a bien sûr deux façons de faire. L'une est de constater que chaque ligne est nulle, puisque (u_n) est dans $\mathcal{L}(a,b)$, et donc que la réponse est 0. Si on préfère sommer par colonnes, on obtient : $u_{n+4} + (a+c)u_{n+3} + (b+ac+d)u_{n+2} + (bc+ad)u_{n+1} + bdu_n$.

b) Le calcul qui précède donne à peu près directement la réponse : il a montré que (u_n) était dans l'ensemble $\mathcal{L}(a+c, b+ac+d, bc+ad, bd)$. Comme (u_n) était un élément quelconque de $\mathcal{L}(a,b)$ ceci prouve l'inclusion.

14) La solution est courte mais devrait sembler un peu astucieuse. Prenons (u_n) et (v_n) deux éléments de $\mathcal{L}_2$. Par définition de $\mathcal{L}_2$, on peut introduire des réels a, b, c et d tels que $(u_n) \in \mathcal{L}(a,b)$ tandis que $(v_n) \in \mathcal{L}(c,d)$. En appliquant la question précédente on voit que $\mathcal{L}(a,b) \subset \mathcal{L}(a+c, b+ac+d, bc+ad, bd)$; appliquons maintenant la question précédente en y échangeant a et c d'une part, b et d d'autre part : on obtient l'inclusion $\mathcal{L}(c,d) \subset \mathcal{L}(c+a, d+ca+b, da+cb, db)$. Dans ces deux expressions, l'ensemble de droite est le même. On conclut que les suites (u_n) et (v_n) appartiennent toutes les deux à $\mathcal{L}(a+c, b+ac+d, bc+ad, bd)$. On va alors rechercher la question 10 et on conclut que $(u_n)+(v_n)$ appartient aussi à $\mathcal{L}(a+c, b+ac+d, bc+ad, bd)$. Il appartient donc à $\mathcal{L}_4$.

15) Comme au 12 d), cherchez à la maison. Ce n'est pas vraiment plus difficile que ce qu'on vient de faire, mais les notations sont inévitablement assez lourdes et c'est un peu pénible.

16) Mérite aussi d'être creusée avant d'en lire un corrigé. Il n'y a pas vraiment d'astuce, il faut surtout être très courageux : on part d'un $(u_n) \in \mathcal{L}(-a,-b)$, d'un $(v_n) \in \mathcal{L}(-c,-d)$, on écrit les six (!) relations :

$$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$$

$$u_{n+3} = au_{n+2} + bu_{n+1}$$

$$u_{n+4} = au_{n+3} + bu_{n+2}$$

$$v_{n+2} = cv_{n+1} + dv_n$$

$$v_{n+3} = cv_{n+2} + dv_{n+1}$$

$$v_{n+4} = cv_{n+3} + dv_{n+2}.$$

On multiplie la troisième par la sixième pour commencer, puis on se bat un moment et, après des calculs assez volumineux, on y arrive - enfin on peut y arriver. La ténacité est alors récompensée. Vous pouvez bien sûr obtenir de moi plus d'indications, mais seulement si vous avez essayé un peu tout seul d'abord.