Partie A.

1) Pour chaque $n \geq 1$, on calcule $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{n+1} + \ln n - \ln(n+1)$. On fait tendre n vers l'infini et on constate que :

$$\frac{1}{n+1} + \ln n - \ln(n+1) = \frac{1}{n+1} - \ln(1+\frac{1}{n}) = \left(\frac{1}{n} + O(\frac{1}{n^2})\right) - \left(\frac{1}{n} + O(\frac{1}{n^2})\right) = O(\frac{1}{n^2}).$$

Cette majoration justifie la convergence de $\Sigma(u_{n+1} - u_n)$.

La somme partielle de la série qui précède calculée entre 1 et $n-1$ vaut $u_n - u_1$. La suite de terme général $u_n - u_1$ converge donc et de façon immédiate aussi la suite (u_n).

2) a) On fixe x et on calcule h'_x. Pour tout $t > 0$ on trouve :

$$h'_x(t) = \frac{1 - x \ln t}{t^{x+1}}.$$

Après examen des limites, $h_x(t)$ tend vers $-\infty$ en 0^+, ça coupe l'axe des abscisses en $t = 1$, ça continue à monter jusqu'à $t = e^{1/x}$ où ça atteint un maximum dont la valeur est $1/ex$ et ça descend en tendant vers 0 quand t tend vers l'infini.

b) Vu le calcul qui précède pour $x = 1$, la fonction h_1 est décroissante sur $[e, +\infty[$ donc sur chaque $[k, k+1]$ où $3 \leq k$.

Les deux inégalités sont des applications de l'inégalité de la moyenne sur les intervalles d'intégration compte tenu de cette décroissance.

c) C'est une série alternée (décroissante pour $n \geq 3$). Elle n'est pas absolument convergente puisque $1/n = o(\ln n/n)$ et qu'une série à termes positifs devant laquelle une série divergente est négligeable est elle-même divergente.

Partie C.

1) a) i) Soit $x \geq 1$. On calcule :

$$v'_n(x) = \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^x} - \frac{\ln n}{n^x} = h_x(n+1) - h_x(n).$$

ii) Soit $n \geq 3$ et soit $x \geq 1$. Puisque $e^{1/x} \leq e \leq 3 \leq n$, et au vu du tableau de variations du A 2 a), la fonction h_x décroît strictement sur $[3, +\infty[$ et a fortiori sur $[n, n+1]$. Le réel $v'_n(x)$ est donc strictement négatif.

Pour $n \geq 3$ la fonction v_n est donc décroissante sur son ensemble de définition. Elle tend vers 0 en $+\infty$; on déduit de ces deux informations que $\|v_n\|_\infty = v_n(1) = \frac{1}{n(n+1)}$.

Ceci est le terme général d'une série convergente (puisqu'équivalente à la série convergente à termes positifs $\Sigma(1/n^2)$), d'où la convergence normale de Σv_n.

b) i) Cette question sera plus facile dans un mois et demi, quand le cours sur les intégrales contenant un paramètre aura été traité. Elle est néanmoins déjà abordable, à condition de calculer l'intégrale, ce qui est facile. On calcule donc w_n ce qui conduit à deux formules différentes (l'intégration de $1/t$ appelle le logarithme et doit se faire à part) :

$$w_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n^x} - \frac{1}{x-1}\left[\frac{1}{n^{x-1}} - \frac{1}{(n+1)^{x-1}}\right] & \text{si } 1 < x \\ \frac{1}{n} - [\ln(n+1) - \ln n] & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

La continuité ailleurs qu'en 1 est évidente sur cette formule, la continuité en 1 s'obtient par un passage à la limite facile en écrivant un développement limité (il est suggéré de renommer l'expression $x-1$, par exemple en posant $h = x - 1$ pour ne pas s'y perdre).

ii) La positivité de $w_n(x)$ s'obtient par l'inégalité de la moyenne sur $[n, n+1]$ en majorant la fonction monotone $t \mapsto 1/t^x$ par sa valeur en la borne n. L'autre inégalité s'obtient de la même façon cette fois en minorant par la valeur en la borne $n+1$.

iii) La majoration du ii) et la convergence normale de Σv_n garantissent la convergence normale de Σw_n, qui est une série de fonctions continues au vu du i). Comme somme uniforme d'une série de fonctions continues, la fonction W est elle aussi continue sur son intervalle de définition.

c) i) On peut profiter des calculs faits au b) i) pour expliciter une somme partielle de la série Σw_n. Par télescopage des crochets écrits plus haut, pour tout $N \geq 1$ on peut écrire :

$$\sum_{n=1}^{N} w_n(x) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^x} + \frac{1}{1-x}\left[1 - \frac{1}{(N+1)^{x-1}}\right].$$

Le résultat demandé s'obtient alors en faisant tendre N vers l'infini.
ii) Vu le i) la limite cherchée est aussi la limite de $W(x)$, mais W est continue sur $[1, +\infty[$ donc cette limite est $W(1)$.
Comme on l'a fait ci-desus en un $x > 1$ on peut expliciter les sommes partielles de la série $\Sigma w_n(1)$ en pratiquant encore le télescopage :

$$\sum_{n=1}^{N} w_n(1) = \left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}\right) - \ln(N+1).$$

Cette suite de sommes partielles diffère donc de la suite u_N du A 1) de la suite $\ln(N+1) - \ln N$, qui tend vers zéro. Ceci montre que la suite des sommes partielles de $\Sigma w_n(1)$ a la même limite que (u_N) c'est-à-dire la constante d'Euler γ.
On conclut que $W(1) = \gamma$ est la réponse attendue.
2) a) On fixe un x et hop critère des séries alternées.
b) On commence par calculer $\varphi_n'(x)$ pour $n \geq 1$ et $x > 0$:

$$\varphi_n'(x) = (-1)^n \frac{\ln n}{n^x} = (-1)^n h_x(n).$$

On prend à ce moment la décision de ne plus travailler qu'avec des $x \geq a$; pour un tel x, la fonction h_x, qui est strictement décroissante sur $[e^{1/x}, +\infty[$ est *a fortiori* strictement décroissante sur l'intervalle $[e^{1/a}, +\infty[$ qui commence plus loin à droite. De façon concurrente à cette bonne résolution, on ne travaillera qu'avec des n strictement plus grands que $e^{1/a}$.
Pour chaque x fixé et en se restreignant à ces seuls n, la suite des $h_x(n)$ est une suite strictement décroissante, qui tend vers zéro quand n tend vers l'infini. La série de terme général $\varphi_n'(x) = (-1)^n h_x(n)$ vérifie donc le critère des séries alternées à partir d'un certain n et est convergente. De plus dès que $N \geq e^{1/a}$ le reste de cette série (sommé de N à l'infini) est plus petit en valeur absolue que le premier terme négligé, donc majoré par $|\varphi_N'(x)|$. La fonction $|\varphi_N'|$ est elle-même décroissante (voir son expression comme $\ln N/N^x$), donc cette majoration peut elle-même être majorée indépendamment de x par le réel $|\varphi_N'(a)|$. On a réussi à majorer uniformément les restes de la série par quelque chose qui tend vers zéro : la convergence uniforme est prouvée.
c) Ben c'est un simple coup de critère de dérivation d'une série - c'est facile en faisant attention à bien faire intervenir des segments auxiliaires. On écrit en particulier comme recommandé :

$$\varphi'(1) = S$$

où il s'agit du S de la fin de la partie A.
3) a) Soit $x > 1$. On peut alors séparer la série qui définit $\varphi(x)$ en somme de deux séries convergentes :

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^x} - \sum_{l=1}^{+\infty} \frac{1}{(2l)^x}$$

et, par ailleurs :

$$(1 - 2^{1-x})F(x) = F(x) - 2\sum_{l=1}^{+\infty} \frac{1}{(2l)^x} = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^x} + \sum_{l=1}^{+\infty} \frac{1}{(2l)^x}\right) - 2\sum_{l=1}^{+\infty} \frac{1}{(2l)^x}.$$

C'est bien le même résultat.

b) On note $h = x - 1$. Avec cette notation auxiliaire :

$$1 - 2^{1-x} = 1 - e^{-h \ln 2} = (\ln 2)h - \frac{(\ln 2)^2}{2} h^2 + O(h^3).$$

Par ailleurs la question 1) c) ii) a montré que :

$$F(x) = \frac{1}{x-1} + \gamma + o(1) = \frac{1}{h} + \gamma + o(1).$$

En multipliant ces deux développements entre eux, et en utilisant le a), on obtient :

$$\varphi(x) = \ln 2 + \left(\gamma - \frac{\ln 2}{2}\right)(\ln 2)h + o(h).$$

c) Puisque $S = \varphi'(1)$, c'est aussi le coefficient de h dans le développement limité qui précède. On conclut que :

$$S = \left(\gamma - \frac{\ln 2}{2}\right)(\ln 2).$$