Devoir n°3 - Partie analyse

Ex 3

1. Si $x=0$, $f_n(x) = f_n(0) = 0 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Sinon, $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{nx}{(n\ln n)x^2} = \dfrac{1}{x\ln n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Donc, $\boxed{(f_n) \text{ CVS vers la fonction nulle sur } [0,1]}$.

2. (a) L'intégrande a pour primitive $x \longmapsto \ln(1+ax^2)$. Il est aussi continu. Par le théorème fondamental de l'analyse,

$$\int_0^1 \frac{2ax}{1+ax^2}\,dx = \left[\ln(1+ax^2)\right]_0^1 = \ln(1+a)$$

(c) Posons $a = n\ln n$. Alors, d'après (a),

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 \frac{nx}{1+(n\ln n)x^2}\,dx = \frac{1}{2\ln n}\int_0^1 \frac{2n\ln n}{1+(n\ln n)x^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2\ln n}\ln(1+a) = \boxed{\frac{\ln(1+n\ln n)}{2\ln n}}$$

Donc, $I_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(n\ln n)}{2\ln n} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\ln(\ln n)}{2\ln n}$

$$\xrightarrow[n\to+\infty]{} \boxed{\frac{1}{2}} \text{ puisque}$$

(b) $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(\ln n)}{\ln n} = \lim_{X\to+\infty} \dfrac{\ln(X)}{X} = 0}$ par croissances comparées

Si (f_n) était unif convergente sur $[0,1]$, on aurait

$\lim I_n = \int_0^1 \lim f_n(x)\,dx = \int_0^1 0\,dx = \underline{0}$, <u>absurde</u>.

3. On a

$$\underline{\|f_n\|_\infty} \geq f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{1+\frac{\ln n}{n}} \underline{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 1}.$$

Donc, (f_n) ne peut converger uniformément (vers la fonction nulle) sur l'intervalle $[0,1]$.

— o —

Ex 4

1. Si $x=0$, $f_n(x)=f_n(0)=0$ et la série $\sum f_n(x)=\sum f_n(0)=\sum 0$ est la série nulle. Sinon,

$$f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^2 x^3}{n^4} = x^3 \cdot \frac{1}{n^2}$$

Par le critère de Riemann et le th sur les équivalents des SATP, on déduit que $\sum f_n(x)$ converge.

2.
$$\|f_n\|_\infty \geq f_n(n^{1/3}) = \frac{n^3}{n^4+n^4} = \frac{1}{2n}$$

Par le critère de Riemann et le th de comparaison des SATP, $\sum f_n$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}_+$.

3. En majorant le numérateur et en minorant le dénominateur, on a

$$0 \leq f_n(x) = \frac{n^2 x^3}{n^4+n^3x^3} \leq \frac{n^2 a^3}{n^4} = \frac{a^3}{n^2}$$

4. On en déduit que $\sum f_n$ est NCV sur $[0,a]$. Sa somme S est donc continue sur cet intervalle et sur $\mathbb{R}_+$ tout entier, puisque $a>0$ est arbitraire et puisque chaque f_n est continue sur $\mathbb{R}_+$

5. En minorant le dénominateur (sous l'hypothèse $x>0$), on a

$$0 \leqslant f_n(x) = \frac{n^2x^3}{n^4+n^3x^3} \leqslant \frac{n^2x^3}{n^3x^3} = \frac{1}{n}$$

L'inégalité reste vraie pour $x=0$, donc $\boxed{C=1}$ convient.

6. On reconnaît une série alternée, dont le TG tend vers 0 quand $n\to+\infty$ par la question précédente. De plus,

$$|g_n(x)| = f_n(x) = \frac{n^2x^3}{n^4+n^3x^3} = \frac{x^3}{n^2+nx^3}$$

est le TG d'une suite décroissante. Par le CSSA, la série $\sum g_n$ CVS sur $\mathbb{R}_+$ et on a une estimation du reste :

$$|R_n(x)| \leqslant |g_{n+1}(x)| = \frac{x^3}{(n+1)^2+(n+1)x^3} \leqslant \frac{1}{n+1},$$

d'après la question précédente. Ainsi,

$$\|R_n\|_\infty \leqslant \frac{1}{n+1}$$

et la série $\sum g_n$ CVU sur $\mathbb{R}_+$.