Devoir n° 2

Partie algèbre

Exercice 1.

1. On calcule le polynôme caractéristique de A. On a

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X-1 & 0 & -1 \\ 1 & X-2 & -1 \\ m-2 & 2-m & X-m \end{vmatrix} =_{C_1+C_2\to C_1} \begin{vmatrix} X-1 & 0 & -1 \\ X-1 & X-2 & -1 \\ 0 & 2-m & X-m \end{vmatrix}$$
$$=_{L_2-L_1\to L_2} \begin{vmatrix} X-1 & 0 & -1 \\ 0 & X-2 & 0 \\ 0 & 2-m & X-m \end{vmatrix} = (X-1)\begin{vmatrix} X-2 & 0 \\ 2-m & X-m \end{vmatrix}$$
$$= (X-1)(X-2)(X-m).$$

Les valeurs propres de f sont donc 1, 2 et m. En particulier, si $m = 1$ ou 2, f n'admet que deux valeurs propres.

2. Si $m \neq 1$ et $m \neq 2$, f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ qui admet trois valeurs propres distinctes : f est donc diagonalisable. Si $m = 1$, le polynôme caractéristique de f est $(X-1)2(X-2)$. Dans ce cas, 2 est valeur propre de multiplicité 1 de f et 1 est valeur propre de multiplicité 2. L'endomorphisme f est donc diagonalisable si et seulement si la dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre 1 est égale à 2. Cherchons ce sous-espace (rappelons qu'on a $m = 1$). Une base de $\ker(f-I)$ est donc donnée par le vecteur $(1,1,0)$. L'espace est de dimension $1 \neq 2$: la matrice n'est pas diagonalisable. Supposons maintenant $m = 2$. Cette fois, c'est 1 qui est valeur propre de f de multiplicité 1 et 2 qui est valeur propre de multiplicité 2. On doit donc calculer la dimension de $\ker(f-2I)$. Une base de $\ker(f-2I)$ est donnée par la famille des deux vecteurs $(1,0,1)$ et $(0,1,0)$. En particulier, $\ker(f-2I)$ est de dimension 2 et f est diagonalisable.

3. On va commencer par diagonaliser f. On a déjà cherché une base du sous-espace propre correspondant à la valeur propre 2. Une base de $\ker(f-I)$ est donc donnée par le vecteur $(1,1,0)$. Notons $u = (1,1,0)$, $v = (0,1,0)$ et $w = (1,0,1)$. Alors (u,v,w) est une base de vecteurs propres de f et dans cette base, la matrice de f est

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Notons P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à la base (u,v,w). La matrice P est donnée par

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

et on a $A = PDP^{-1}$. On doit calculer P^{-1}. On trouve

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

On obtient

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2^k - 1 \\ 1 - 2^k & 2^k & 2^k - 1 \\ 0 & 0 & 2^k \end{bmatrix}.$$

Exercice 2. 1. On doit vérifier que si $P \in \mathbb{R}_n[X]$, alors $f(P) \in \mathbb{R}_n[X]$. Pour cela, on remarque que si $P(X) = a_n X^n + \dots$ (avec éventuellement $an = 0$), alors $(X^2 - 1)P'(X) = na_n X^n + 1 + \dots$ et $(nX + 1)P(X) = na_n X^n + 1 + \dots$. Les éventuels termes de degré $n + 1$ se simplifient, et $f(P)$ est donc de degré au plus n. Soit $P_1, P_2 \in \mathbb{R}^n[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors on a :

$$\begin{aligned} f(\lambda P_1 + P_2) &= (X^2 - 1)(\lambda P_1 + P_2)' - (nX + 1)(\lambda P_1 + P_2) \\ &= \lambda(X^2 - 1)P_1' - \lambda(nX + 1)P_1 + (X^2 - 1)P_2' - (nX + 1)P_2 \\ &= \lambda f(P_1) + f(P_2). \end{aligned}$$

L'application f est bien linéaire et donc elle est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. On commence par remarquer que, pour $k = 1, \dots, n - 1$,

$$\begin{aligned} P_k'(X) &= -k(1 - X)^{k-1}(1 + X)^{n-k} + (n - k)(1 - X)^k(1 + X)^{n-k-1} \\ &= (1 - X)^{k-1}(1 + X)^{n-k-1}(-k(1 + X) + (n - k)(1 - X)) \\ &= (1 - X)^{k-1}(1 + X)^{n-k-1}(-nX + (n - 2k)) \end{aligned}$$

On en déduit que

$$(X^2 - 1)P_k'(X) = (nX - (n - 2k))P_k(X)$$

et donc

$$f(P_k) = (nX - (n - 2k) - nX - 1)P_k = (2k - n - 1)P_k.$$

Ce calcul reste valable lorsque $k = 0$ ou $k = n$.

3. f est en endomorphisme de $R_n[X]$ qui est de dimension $n + 1$. On a trouvé $n + 1$ valeurs propres distinctes pour cet endomorphisme, les réels $2k - n - 1$ pour $k = 0, \dots, n$. Il est donc diagonalisable, et chaque espace propre est de dimension 1. Plus précisément, (P_k) est une base de l'espace propre associé à la valeur propre $2k - n - 1$.

4. f est bijectif si et seulement si 0 n'est pas valeur propre de f. Or, l'équation $2k - n - 1 = 0$ est équivalente à $k = (n + 1)/2$. Ceci est un élément de $\{0, \dots, n\}$ si et seulement n est impair. Donc f est bijectif si et seulement si n est pair.