DS2 du 17 mars 2026
Corrigé

Corrigé 1. (5 pts)
On cherche une base orthonormée de F. On commence par une base :

$$u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

conviennent. On va orthonormaliser cette base. On prend

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} u_1$$

et on cherche un vecteur $u_2 + \lambda\, u_1$ qui soit orthogonal à u_1. On trouve $\lambda = -1/2$ et le vecteur

$$\begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

que l'on rend normé en

$$v_2 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Le projeté orthogonal de b sur F est donné par

$$p(b) = < v_1 \,, b > \; v_1 + < v_2 \,, b > \; v_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

La distance de b à F est alors $||b - p(b)|| = 2\sqrt{10}$.

Corrigé 2. (6 points)
1) On est en dimension finie, donc être compact est équivalent à être fermé et borné.
L'ensemble A s'écrit $f^{-1}\left[\,]-\infty, 1]\right]$ où $f(x, y, z) = x^2 + 4xy + 5y^2 + z^2$. Cette fonction f est continue de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ car polynomiale. L'ensemble $]-\infty, 1]$ est un fermé de $\mathbb{R}$, donc A est fermé.
L'expression $x^2 + 4xy + 5y^2 + z^2$ se factorise en $(x + 2y)^2 + y^2 + z^2$. En particulier si elle est majorée par 1, alors chacun des trois termes aussi, car ils sont tous positifs. Ainsi, dans A, la coordonnée z est bornée, la coordonnée y aussi et $x + 2y$ aussi. Ce qui implique que x est bornée. On a montré que A est borné et donc que A est compact.
Dans l'expression de B on voit une factorisation $(x + 2y)^2 - y^2 + z^2$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les éléments de la forme

$$\begin{pmatrix} \sqrt{1 + n^2} - 2n \\ n \\ 0 \end{pmatrix}$$

sont éléments de B. Ce qui prouve que B est non borné et donc non compact.

2) a) Soit

$$V_k = \begin{pmatrix} a_k & b_k \\ b_k & c_k \end{pmatrix} \ , \ k \in \mathbb{N}$$

une suite dans S_2 qui converge vers une matrice $V \in M_2(\mathbb{R})$. Toutes les normes sont équivalentes sur $M_2(\mathbb{R})$, donc cette convergence est équivalente à la convergence coefficient par coefficient. Ainsi V_n converge vers une matrice

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

qui appartient à $S_2(\mathbb{R})$. On a montré que $S_2(\mathbb{R})$ est fermé.
b) Si

$$V = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

est un élément de $S_2(\mathbb{R})$ alors, pour tout $r > 0$, la matrice

$$\begin{pmatrix} a & b + r/2 \\ b & c \end{pmatrix}$$

appartient à la boule $B(V, r)$ (pour la norme infinie, par exemple) et pourtant elle n'appartient pas à $S_2(\mathbb{R})$. Donc $S_2(\mathbb{R})$ n'est pas ouvert dans $M_2(\mathbb{R})$.

Corrigé 3. (7 points)

1. Comme f et f' sont continues sur un intervalle compact, elle sont bornées et la définition de $N(f)$ fait sens.
   L'homogénéité et l'inégalité triangulaire ne posent aucune difficulté. Seule la séparation mérite discussion. Si $N(f) = 0$ alors $|f(t) + f'(t)| = 0$ pour tout $t \in [0, 1]$. C'est à dire $f'(t) = -f(t)$ pour tout $t \in [0, 1]$. Les seules fonctions vérifiant cette équation différentielle sont $f(t) = f(0)\, e^{-t}$. Mais comme $f(0) = 0$ par hypothèse, alors f est la fonction nulle.
2. La fonction $f_n = t^n/\sqrt{n}$ est clairement croissante sur $[0, 1]$ donc son sup est atteint et vaut $1/\sqrt{n}$. Ainsi $\lim_n ||f_n||_\infty = 0$ et cela prouve que (f_n) converge vers la fonction nulle, pour la norme infinie.
3. $f_n(t)+f_n'(t) = t^n/\sqrt{n}+nt^{n-1}/\sqrt{n}$. Cette fonction est aussi croissante, donc $N(f_n) = 1/\sqrt{n}+n/\sqrt{n}$. Cette quantité tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$. Cela prouve que (f_n) n'a pas de limite pour la norme N, car si elle avait une limite f on aurait $\lim_n N(f_n) = N(f) < \infty$.
4. Elles ne sont pas équivalentes puisqu'on a trouvé une suite dont le comportement limite est différent pour les 2 normes.

Corrigé 4. (9 points)

1. (a) $p + q$ est un projecteur donc $(p + q)^2 = p + q$ ce qui donne $pq + qp = 0$.
   En composant par p à gauche on obtient $pq + pqp = 0$, alors qu'en composant par p à droite on obtient $pqp + qp = 0$. Ainsi $pqp + pq = pqp + qp$ et donc $pq = qp = 0$.
   (b) La relation $pq = 0$ entraine que $\operatorname{Im} q \subset \operatorname{Ker} p$. Mais $\operatorname{Ker} p = (\operatorname{Im} p)^\perp$ pour un projecteur orthogonal. Donc $\operatorname{Im} q \subset (\operatorname{Im} p)^\perp$ et ils sont donc orthogonaux.
2. (a) On peut soit utiliser directement un résultat vu en TD : $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$, ce qui donne immédiatement le résultat demandé. Ou bien, si on ne l'a plus en tête, faire comme suit :
   – soit $x \in \operatorname{Ker}(p) \cap \ker(q)$, soit $y \in \operatorname{Im} p + \operatorname{Im} q$, alors $y = p(a) + q(b)$ et $< y\,, x >=< p(a)\,, x > + < q(b)\,, x >= 0$ par orthogonalité du ker et de l'Im pour des projecteurs orthogonaux. On a donc montré une inclusion.
   – inversement, si $y \in (\operatorname{Im} p + \operatorname{Im} q)^\perp$ alors $y \in (\operatorname{Im} p)^\perp = \operatorname{Ker} p$ et $y \in (\operatorname{Im} q)^\perp = \operatorname{Ker} q$. On a montré l'autre inclusion.
   (b) On a $E = (\operatorname{Im} p + \operatorname{Im} q) \oplus ((\operatorname{Im} p + \operatorname{Im} q)^\perp$. Comme $\operatorname{Im} p$ et $\operatorname{Im} q$ sont orthogonaux alors ils sont en somme directe orthogonale. Au final $E = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Im} q \oplus (\operatorname{Im} p + \operatorname{Im} q)^\perp = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Im} q \oplus (\operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Ker} q)$, où les sommes directes sont orthogonales. On sait alors (cours) que la concaténation de bases orthonornormées de chacun de ces 3 sous-espaces donne une base orthonormée de E.

(c) La restriction de $p+q$ sur $\operatorname{Im} p$ est l'identité car q est nulle sur $\operatorname{Im} p$. De même la restriction de $p+q$ sur $\operatorname{Im} q$ est l'identité. Sur $\operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Ker} q$ l'application $p+q$ est clairement nulle.

Ainsi la matrice de $p+q$ dans la base B est diagonale de la forme $\operatorname{diag}(1, \ldots, 1, 1, \ldots, 1, 0 \ldots, 0)$.

Cette matrice est, on le rappelle, écrite dans une base orthonormée, et elle décrit donc un endomorphisme qui est égal à id sur un sous-espace et 0 sur son orthogonal. Ce qui est exactement la définition d'un projecteur orthogonal.