FEUILLE 5 - EXERCICE 9

$$M = \begin{pmatrix} a & c & b \\ c & a+b & c \\ b & c & a \end{pmatrix}$$

> Rq : Le "théorème spectral" dit que toute matrice symétrique réelle est diagonalisable. Ici, justement, $M \in \mathcal{S}_3(\mathbb{R})$...

- Calculons le polynôme caractéristique de M.

On a $\chi_M(X) = \begin{vmatrix} X-a & -c & -b \\ -c & X-a-b & -c \\ -b & -c & X-a \end{vmatrix} \underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_3}{=} \begin{vmatrix} X-a+b & 0 & -b+a-X \\ -c & X-a-b & -c \\ -b & -c & X-a \end{vmatrix}$

On factorise la première ligne par $X-a+b$ et on fait $C_3 \leftarrow C_3 + C_1$:

$$\chi_M(X) = (X-a+b) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -c & X-a-b & -2c \\ -b & -c & X-a-b \end{vmatrix}$$

$$= (X-a+b)\left((X-a-b)^2 - 2c^2\right)$$

$$= (X-a+b)(X-a-b-\sqrt{2}c)(X-a-b+\sqrt{2}c)$$

- Les valeurs propres de M sont donc $\lambda_1 = a-b$; $\lambda_2 = a+b+\sqrt{2}c$; $\lambda_3 = a+b-\sqrt{2}c$

- Si les valeurs propres sont toutes distinctes, alors M est diagonalisable.
- Si $\lambda_2 = \lambda_3$ (càd si $c=0$), alors :

 * sq $\lambda_1 = \lambda_2$, càd $b=0$. La matrice M est égale à $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$: elle est diagonale, donc diagonalisable.

 * sq $\lambda_1 \neq \lambda_2$, càd $b \neq 0$. $\begin{cases} \lambda_1 \text{ est une valeur propre simple} \\ \lambda_2 = a+b \text{ est de multiplicité } 2. \end{cases}$

 On a $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{a+b} \iff \begin{cases} ax + bz = (a+b)x \\ (a+b)y = (a+b)y \\ bx + az = (a+b)z \end{cases}$

 $\iff bz = bx$

 $\iff z = x$ car $b \neq 0$

 Cela montre que $\dim E_{a+b} = 2 = \text{mult}_{\chi_M}(a+b)$.

 Comme de plus, on a nécessairement $\dim E_{\lambda_1} = 1 = \text{mult}_{\chi}(\lambda_1)$, on en déduit que M est diagonalisable.

Conclusion : M est diagonalisable pour tous réels a, b et c.