Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre automne 2015-2016

Math I - CPGEI

Devoir n$^{\text{o}}$ 3

PARTIE COMMUNE

<u>Exercice 1.</u> Considérons un entier $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, et la fonction f définie comme suit :

$$f : \begin{array}{ccc} [0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1+x^n}{(1+x)^n}. \end{array}$$

1. Calculer, si elle existe, la limite de f en $+\infty$.
2. Dresser le tableau de variations de f sur $[0,+\infty[$.
3. En déduire que f admet un minimum sur $[0,+\infty[$ et le préciser.
4. Montrer que pour tout réel $x > 0$, on a $(1+x)^n \leq 2^{n-1}(1+x^n)$.
5. Montrer que pour tous réels $x > 0$ et $y > 0$, on a $(x+y)^n \leq 2^{n-1}(x^n + y^n)$.

Corrigé :

1. Pour $x > 0$ on a $f(x) = \frac{\frac{1}{x^n}+1}{\left(\frac{1}{x}+1\right)^n} \to_{x\to\infty} 1$.
2. Comme $(1+x)^n > 0$ pour x positif, f est dérivable sur $]0,\infty[$ comme composée et quotient de fonctions classiques dérivables, et pour $x > 0$ on a
$$f'(x) = n\frac{x^{n-1}-1}{(1+x)^{2n+1}}.$$
On en déduit le tableau de variations suivant pour f :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\searrow$	$2^{-(n-1)}$	$\nearrow$	1

3. D'après le signe de f', f est strictement décroissante sur $[0,1]$ et strictement croissante sur $[1,+\infty[$. Elle admet donc comme minimum $f(1) = 2^{-(n-1)}$.
4. D'après la question précédente, on a $f(x) \geq 2^{-(n-1)}$ pour tout $x > 0$, ce qui est équivalent à $(1+x)^n \leq 2^{n-1}(1+x^n)$ pour tout $x > 0$.
5. Comme $x/y > 0$ on peut remplacer dans le résultat de la question précédente x par x/y, ce qui donne $\left(1+\frac{x}{y}\right)^n \leq 2^{n-1}\left(1+\left(\frac{x}{y}\right)^n\right)$, et qui implique, en multipliant chaque membre par y^n qui est positif, $(x+y)^n \leq 2^{n-1}(x^n+y^n)$.

Exercice 2.

1. (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $|x| < \sqrt{x^2+1}$.

   (b) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $x + \sqrt{x^2+1} > 0$.

2. On considère l'application f définie par

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln(x+\sqrt{x^2+1}). \end{array}$$

   (a) Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et calculer $f'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

   (b) Montrer que f est injective.

   (c) Montrer que pour tout $y \in \mathbb{R}$ on a $f(\mathrm{sh}(y)) = y$. Que peut-on en déduire ?

   (d) Calculer, si elles existent, les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.

Corrigé :

1. (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $x^2 < x^2+1$, ce qui implique, comme la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est strictement croissante sur $[0, +\infty[$, $|x| < \sqrt{x^2+1}$.

   (b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $x + \sqrt{x^2+1} \geq -|x| + \sqrt{x^2+1}$, qui est strictement positif d'après la question précédente.

2. (a) La fonction $x \mapsto x^2+1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et à valeurs strictement positives, et donc la fonction $x \mapsto x + \sqrt{x^2+1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme et composée de fonctions dérivables. Cette fonction est à valeurs strictement positives sur $\mathbb{R}$ d'après la question précédente, et on en déduit que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables, la fonction $x \mapsto \ln x$ étant dérivable sur $]0, +\infty[$.

   Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$f'(x) = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}} = \frac{x+\sqrt{x^2+1}}{x^2+1+\sqrt{x^2+1}}.$$

   (b) En utilisant la question 1)b) on voit que $f'(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. La fonction f est ainsi strictement croissante sur $\mathbb{R}$, et donc injective.

   (c) Comme pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1$ et $\mathrm{ch}(x) \geq 0$, on a $\sqrt{\mathrm{sh}^2(x)+1} = \mathrm{ch}(x)$, et donc $f(\mathrm{sh}(x)) = \ln(\mathrm{sh}(x) + \mathrm{ch}(x)) = \ln(e^x) = x$. On en déduit que f est surjective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et donc bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

   (d) On a $x + \sqrt{x^2+1} \to_{x\to+\infty} +\infty$, et donc $f(x) \to_{x\to+\infty} +\infty$.

   Pour $x < 0$ on a

$$x+\sqrt{x^2+1} = -|x|+\sqrt{x^2+1} = (-|x|+\sqrt{x^2+1})\frac{|x|+\sqrt{x^2+1}}{|x|+\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{|x|+\sqrt{x^2+1}} \to_{x\to-\infty} 0.$$

   On en déduit que $f(x) \to_{x\to-\infty} -\infty$.

Exercice 3.

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, notons $P(z) = z^2 - (\sqrt{3} - 3i)z - 2 - 2\sqrt{3}i$.

1. (a) Résoudre l'équation $P(z) = 0$. Notons z_1 et z_2 les deux solutions.

   (b) Montrer que z_1 et z_2 ont le même module, qui est noté r.

2. (a) Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $P(z) = (z - z_1)(z - z_2)$.

   (b) En déduire que pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{z_1, z_2\}$, on a $P(z)\Big(\dfrac{1}{z - z_1} + \dfrac{1}{z - z_2}\Big) = 2z - (z_1 + z_2)$.

3. (a) Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ de module 1, la partie réelle de $\dfrac{1}{1 - z}$ est égale à $\dfrac{1}{2}$.

   (b) Soit $w \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$. Calculer la partie réelle de $\dfrac{1}{|w| - w}$.

   (c) Déduire de (2b) et (3b) la partie réelle de $\dfrac{2r^2 - r(z_1 + z_2)}{P(r)}$.

Corrigé :

1. (a) Le discriminant de $z^2 - (\sqrt{3} - 3i)z - 2 - 2\sqrt{3}i$ est $\Delta = (\sqrt{3} - 3i)^2 + 4(2 + 2\sqrt{3}i) = 2 + 2\sqrt{3}i$. Soit $\delta = x + iy$ une racine carrée de Δ. Alors $x^2 - y^2 + 2ixy = \Delta$ et $x^2 + y^2 = |\delta|^2 = |\Delta|$, donc x et y vérifient

$$\left\{\begin{array}{rcl} x^2 + y^2 & = & |\Delta| = \sqrt{4 + 12} = 4 \\ x^2 - y^2 & = & \mathrm{Re}(\Delta) = 2 \\ 2xy & = & \mathrm{Im}(\Delta) = 2\sqrt{3} \end{array}\right. \quad \text{ie} \left\{\begin{array}{rcl} x^2 & = & 3 \\ y^2 & = & 1 \\ 2xy & = & 2\sqrt{3} \end{array}\right. \quad \text{ie} \left\{\begin{array}{l} x = \sqrt{3} \text{ ou } -\sqrt{3} \\ y = 1 \text{ ou } -1 \\ x \text{ et } y \text{ de même signe} \end{array}\right.$$

   Les racines carrées de Δ sont $\delta_1 = \sqrt{3} + i$ et $\delta_2 = -\sqrt{3} - i$, et les solutions de l'équation $P(z) = 0$ sont $z_1 = \dfrac{(\sqrt{3} - 3i) + \delta_1}{2} = \sqrt{3} - i$ et $z_2 = \dfrac{(\sqrt{3} - 3i) + \delta_2}{2} = -2i$.

   (b) $|z_1| = \sqrt{3 + 1} = 2$ et $|z_2| = \sqrt{0 + 4} = 2$. Les modules de z_1 et z_2 sont égaux à $r = 2$.

2. (a) Soit $z \in \mathbb{C}$. En développant $(z - z_1)(z - z_2)$ on obtient :

$$(z - z_1)(z - z_2) = z^2 - (z_1 + z_2)z + z_1z_2 = z^2 - (\sqrt{3} - 3i)z - 2 - 2\sqrt{3}i = P(z)$$

   (b) Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{z_1, z_2\}$. En utilisant le résultat de la question précédente, on obtient :

$$P(z)\Big(\frac{1}{z - z_1} + \frac{1}{z - z_2}\Big) = (z - z_1)(z - z_2)\Big(\frac{1}{z - z_1} + \frac{1}{z - z_2}\Big) = (z - z_2) + (z - z_1) = 2z - (z_1 + z_2)$$

3. (a) Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ de module 1. Alors

$$2\mathrm{Re}\Big(\frac{1}{1 - z}\Big) = \frac{1}{1 - z} + \overline{\Big(\frac{1}{1 - z}\Big)} = \frac{1}{1 - z} + \frac{1}{1 - \overline{z}}$$

   Comme $z\overline{z} = |z|^2 = 1$, $\overline{z} = \dfrac{1}{z}$, donc

$$\frac{1}{1 - z} + \frac{1}{1 - \overline{z}} = \frac{1}{1 - z} + \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} = \frac{1}{1 - z} + \frac{z}{z - 1} = \frac{1 - z}{1 - z} = 1$$

   Donc $\mathrm{Re}\Big(\dfrac{1}{1 - z}\Big) = \dfrac{1}{2}$.

   (b) Soit $w \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$. Alors

$$\mathrm{Re}\Big(\frac{1}{|w| - w}\Big) = \frac{1}{|w|}\mathrm{Re}\Big(\frac{1}{1 - \frac{w}{|w|}}\Big) = \frac{1}{2|w|}$$

   car $\dfrac{w}{|w|}$ est de module 1, différent de 1.

(c) Tout d'abord, comme z_1 et z_2 sont différents de $r = 2$, $P(r) \neq 0$ et $\dfrac{2r^2 - r(z_1 + z_2)}{P(r)}$ est bien défini. En appliquant (2b) pour $z = r$, on obtient

$$P(r)\Big(\frac{1}{r - z_1} + \frac{1}{r - z_2}\Big) = 2r - (z_1 + z_2)$$

c'est-à-dire

$$\frac{2r^2 - r(z_1 + z_2)}{P(r)} = r\Big(\frac{1}{r - z_1} + \frac{1}{r - z_2}\Big)$$

Or

$$\mathrm{Re}\Big(\frac{1}{r - z_1} + \frac{1}{r - z_2}\Big) = \mathrm{Re}\Big(\frac{1}{r - z_1}\Big) + \mathrm{Re}\Big(\frac{1}{r - z_2}\Big) = \frac{1}{2r} + \frac{1}{2r} = \frac{1}{r}$$

d'après (3b). Comme r est réel, $\mathrm{Re}\Big(\dfrac{2r^2 - r(z_1 + z_2)}{P(r)}\Big) = r\mathrm{Re}\Big(\dfrac{1}{r - z_1} + \dfrac{1}{r - z_2}\Big) = 1$.

Exercice 4. `Vrai ou faux`

Pour chacune des propositions entre guillemets, décider si elle est vraie ou fausse, et surtout *justifier avec précision* cette réponse par une démonstration ou un contre-exemple. Attention : aucune réponse ne sera prise en compte sans justification.

1. « Pour tout ensemble E et toute application $f : E \to E$, si $f(f(E)) = E$, alors f est surjective. »
2. Pour tout ensemble E et toutes parties A et B de E, notons $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.
   « Pour tout ensemble E et toute partie A de E, il existe une partie B de E telle que $A \triangle B = E$. »
3. « Pour tous ensembles finis A et B, si $\mathrm{card}(A) > \mathrm{card}(B)$, alors toutes les applications de A dans B sont surjectives. »
4. « La fonction
   $$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{x} \end{array}$$
   est injective, et elle n'est pas strictement monotone. »
5. Notons $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $\mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dérivables sur $\mathbb{R}$.
   « L'application
   $$\begin{array}{rcl} \partial : \mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) & \to & \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ f & \mapsto & f' \end{array}$$
   est injective. »

Corrigé :

1. VRAI. Soient E un ensemble et $f : E \to E$ telle que $f(f(E)) = E$. Soit $x \in E = f(f(E))$. Alors il existe $y \in f(E) \subset E$ tel que $x = f(y)$, donc f est surjective.
2. VRAI. Soit E un ensemble et A une partie de E. Posons $B = E \setminus A$. Alors $A \cap B = \emptyset$ et $A \cup B = E$, donc $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = E \setminus \emptyset = E$.
3. FAUX. Soient A et B deux ensembles finis, tels que $\mathrm{card}(A) > \mathrm{card}(B) \geq 2$. B contient au moins deux éléments b_1 et b_2. Soit
   $$\begin{array}{rcl} f : A & \to & B \\ a & \mapsto & b_1 \end{array}$$
   Comme $f(A) = \{b_1\}$, b_2 n'a pas d'antécédent par f, donc f est une application de A dans B qui n'est pas surjective.

4. VRAI. Soit
$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{x} \end{array}$$
Soient x et y dans $\mathbb{R}^*$. Alors $x = f(y) \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{y} \Leftrightarrow y = \dfrac{1}{x}$, donc tout $x \in \mathbb{R}^*$ a un unique antécédent par f, qui est $\dfrac{1}{x}$. De plus, 0 n'admet pas d'antécédent par f. Donc tout élément $x \in \mathbb{R}$ a au plus un antécédent par f, c'est-à-dire f est injective. De plus $f(1) \geq f(2)$, donc f n'est pas strictement croissante, et $f(-1) \leq f(1)$, donc f n'est pas strictement décroissante. Donc f n'est pas strictement monotone, bien qu'elle soit injective.

5. FAUX. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Elle admet alors une primitive $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, qui est dérivable sur $\mathbb{R}$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = f(x)$, donc F est un antécédent de f par ∂. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, et posons
$$\begin{array}{rcl} F_\alpha:\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & F(x)+\alpha \end{array}$$
Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F'_\alpha(x) = f(x)$, donc F_α est aussi un antécédent de f par ∂, qui est différent de F lorsque $\alpha \neq 0$. Donc ∂ n'est pas injectif.