Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre automne 2014-2015

Math I - CPGEI

Corrigé du devoir n° 3

PARTIE COMMUNE

Remarques sur la rédaction :

- Chaque réponse doit être formulée sous la forme d'une *phrase correcte* du point de vue de la syntaxe et de la sémantique (et si possible de l'orthographe). En particulier, on ne peut pas répondre à une question par un simple calcul si celui-ci ne fait pas partie d'une phrase. De la même façon, on ne peut pas juste "balancer" un tableau de variations sans l'introduire par une phrase.
- Vous ne devez pas rédiger vos réponses comme si vous n'aviez qu'un seul professeur pour le cours, les TD, les corrections etc... Par exemple, la formulation "théorème de la bijection" (qui a dû être vu en Terminale) n'est pas suffisamment générique pour être utilisée sans explications. De même, certains d'entre vous font référence au "corollaire du théorème des valeurs intermédiaires" sans dire ce qu'est ce corollaire.
- Vous ne devez pas utiliser des notations sans les introduire. Un exemple classique est le suivant. On retrouve souvent au milieu d'une copie :

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4 + 4 = 8, \quad \text{donc} \quad x_1 = \frac{2 - 2\sqrt{2}}{2},\ x_2 = \frac{2 + 2\sqrt{2}}{2}.$$

  Que valent a, b, c ? Que représente Δ ? Pourquoi calculez-vous x_1 et x_2 ? Tout ceci doit être expliqué !
- Evitez d'épiloguer sur des choses qui doivent être évidentes à votre niveau. Par exemple, préférez "on a $e^{-1} > 0$" à "comme la fonction exponentielle est toujours positive, on en déduit que $e^{-1} > 0$". De même, préférez "la fonction g_n est dérivable" à "la fonction g_n est dérivable comme somme des fonctions $x \mapsto n(x+1)$ et exponentielle, qui sont dérivables". Les réponses trop longues ne séduisent pas le correcteur, elles ont plutôt tendance à l'agacer... Et vous gagnerez du temps !

Exercice 1. (Chaque question vaut 1 point)

1. (a) La fonction g_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g_n'(x) = n + e^x > 0$. Donc g_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Le tableau des variations de g_n est donné par :

x	$-\infty$		$+\infty$
$g_n'(x)$		$+$	
$g_n(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

   (b) g_n est strictement croissante, elle est donc injective.

   (c) On a $g_n(-1) = e^{-1} > 0$ et $g_n(-2) = -n + e^{-2} < 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction g_n est continue et 0 est compris entre $g_n(-2)$ et $g_n(-1)$. Par le théorème des valeurs intermédiaires,

g_n s'annule sur l'intervalle $]-2,-1[$. Comme de plus g_n est injective, g_n ne s'annule qu'une seule fois sur $\mathbb{R}$, en $\alpha_n \in]-2,-1[$.

(d) Comme $g_n(x)$ est strictement croissante, on a $g_n(x) < 0$ si $x < \alpha_n$, $g_n(\alpha_n) = 0$ et $g_n(x) > 0$ si $x > \alpha_n$.

2. (a) Par croissance comparée, on a $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x) = 0$. De plus on a

$$f_n(x) = \frac{xe^x}{n+e^x} = \frac{x}{ne^{-x}+1} \quad \text{et} \quad f_n(x) - x = -\frac{nxe^{-x}}{ne^{-x}+1}.$$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} (f_n(x) - x) = 0$. La courbe $\mathscr{C}_n$ admet donc la droite d'équation $y = 0$ comme asymptote au voisinage de $-\infty$ et la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x$ comme asymptote au voisinage de $+\infty$.

(b) La fonction f_n est dérivable et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f_n'(x) = \frac{(n+e^x)(e^x+xe^x) - (e^x)(xe^x)}{(n+e^x)^2} = \frac{e^x((n+e^x)(1+x) - xe^x)}{(n+e^x)^2} = \frac{e^x g_n(x)}{(n+e^x)^2}.$$

(c) La courbe $\mathscr{C}_n$ a pour tangente au point d'abscisse 0 la droite d'équation $y = f_n(0) + f_n'(0)(x-0)$. On a

$$f_n(0) = 0 \quad \text{et} \quad f_n'(0) = \frac{g_n(0)}{(n+1)^2} = \frac{n+1}{(n+1)^2} = \frac{1}{n+1}.$$

Donc $\mathscr{C}_n$ a pour tangente au point d'abscisse 0 la droite d'équation $y = \frac{x}{n+1}$.

(d) Par définition de α_n, on a $g_n(\alpha_n) = 0$, c'est-à-dire $n(\alpha_n + 1) + e^{\alpha_n} = 0$. Cette égalité peut s'écrire $n + e^{\alpha_n} = -n\alpha_n$ ou encore $-\frac{e^{\alpha_n}}{n} = \alpha_n + 1$. Le calcul de $f_n(\alpha_n)$ donne alors :

$$f_n(\alpha_n) = \frac{\alpha_n e^{\alpha_n}}{n+e^{\alpha_n}} = \frac{\alpha_n e^{\alpha_n}}{-n\alpha_n} = -\frac{e^{\alpha_n}}{n} = \alpha_n + 1.$$

(e) D'après la question (b), f_n' est du signe de g_n. Le tableau des variations de f_n est donc donné par :

x	$-\infty$		α_n		$+\infty$
$f_n'(x)$		$-$	0	$+$	
$f_n(x)$	0	$\searrow$	$1+\alpha_n$	$\nearrow$	$+\infty$

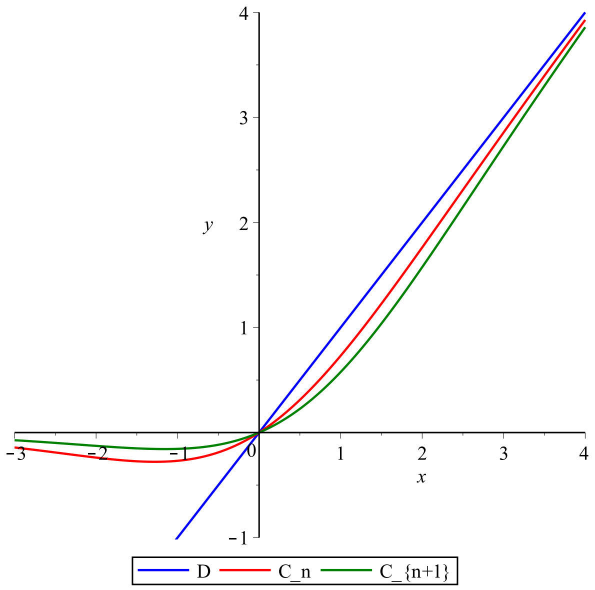
3. (a) Etudions le signe de $f_n(x) - x$. On a pour tout x dans $\mathbb{R}$, $f_n(x) - x = -\frac{nxe^{-x}}{ne^{-x}+1}$. Donc $f_n(x) - x > 0$ si $x < 0$, $f_n(x) - x = 0$ si $x = 0$ et $f_n(x) - x < 0$ si $x > 0$. Donc $\mathscr{C}_n$ est au dessus de $\mathscr{D}$ dans le demi-espace $\{(x,y), x < 0\}$ et $\mathscr{C}_n$ est en dessous de $\mathscr{D}$ dans le demi-espace $\{(x,y), x > 0\}$. La courbe $\mathscr{C}_n$ croise la droite $\mathscr{D}$ au point d'abscisse 0.

(b) On étudie le signe de $f_n(x) - f_{n+1}(x)$. On a :

$$f_n(x) - f_{n+1}(x) = xe^x \left(\frac{1}{n+e^x} - \frac{1}{n+1+e^x} \right).$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\frac{1}{n+e^x} - \frac{1}{n+1+e^x} > 0$, donc $f_n(x) - f_{n+1}(x)$ est du signe de xe^x c'est-à-dire négatif si x est négatif, positif si x est positif et nul si x est nul. Donc $\mathscr{C}_n$ est en dessous de $\mathscr{C}_{n+1}$ dans le demi-espace $\{(x,y), x < 0\}$ et au dessus de $\mathscr{C}_{n+1}$ dans le demi-espace $\{(x,y), x > 0\}$. Les deux courbes se croisent au point d'abscisse 0.

(c) Le tracé donne :



Exercice 2. (2 points)
Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x^2-1)e^{-x}$. On a $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ donc l'ensemble A n'a pas de maximum. Montrons que l'ensemble A a un minimum. On étudie les variations de f. On voit que f est dérivable de dérivée $f'(x) = e^{-x}(-x^2+2x+1)$. Donc $f'(x)$ a le même signe que la fonction polynômiale $-x^2+2x+1$, qui s'annule en $1-\sqrt{2}$ et $1+\sqrt{2}$. On a de plus $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. On en déduit le tableau des variations de f :

x	$-\infty$		$1-\sqrt{2}$		$1+\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(1-\sqrt{2})$	$\nearrow$	$f(1-\sqrt{2})$	$\searrow$	0

On a $f(1-\sqrt{2}) = 2(1-\sqrt{2})e^{\sqrt{2}-1} < 0$. Donc $\min(A) = 2(1-\sqrt{2})e^{\sqrt{2}-1}$.

Exercice 3. (4 points en tout)

1. (2,5 points) Le discriminant de cette équation est

$$\begin{aligned}\Delta &= (5-14i)^2 + 8(5i+12)\\ &= -75-100i.\end{aligned}$$

Cherchons ses racines carrées complexes. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$(a+ib)^2 = \Delta \iff \begin{cases} a^2 - b^2 = -75 & \text{(parties réelles)} \\ 2ab = -100 & \text{(parties imaginaires)} \\ a^2 + b^2 = \sqrt{75^2 + 100^2} & \text{(modules)} \end{cases}.$$

De plus, on a

$$\begin{aligned} \sqrt{75^2 + 100^2} &= \sqrt{25^2(3^2 + 4^2)} \\ &= 25 \times 5 \\ &= 125. \end{aligned}$$

Ainsi, si $(a + ib)^2 = \Delta$, alors on a

$$\begin{cases} 2a^2 = 50 \\ 2b^2 = 200 \\ 2ab = -100 \end{cases},$$

ce qui donne que $a = \pm 5$, $b = \pm 10$ et a et b sont de signes opposés. Donc les deux racines carrées de Δ sont $5 - 10i$ et $-5 + 10i$.

Les solutions de l'équation sont donc

$$Z_1 = \frac{5 - 14i + 5 - 10i}{2} = 5 - 12i \quad \text{et} \quad Z_2 = \frac{5 - 14i - 5 + 10i}{2} = -2i.$$

2. (1,5 points) Soit $z \in \mathbb{C}$ et $Z = z^2$. D'après la question précédente, on a

$$\begin{aligned} z^4 - (5 - 14i)z^2 + (5i + 12) = 0 &\iff Z^2 - (5 - 14i)Z + (5i + 12) = 0 \\ &\iff Z \in \{5 - 12i, -2i\} \\ &\iff z^2 \in \{5 - 12i, -2i\} \end{aligned}$$

Déterminons les racines carrées de $5 - 12i$. On a

$$\begin{aligned} (a+ib)^2 = 5 - 12i &\iff \begin{cases} a^2 - b^2 = 5 & \text{(parties réelles)} \\ 2ab = -12 & \text{(parties imaginaires)} \\ a^2 + b^2 = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13 & \text{(modules)} \end{cases} \\ &\iff a = \pm 3,\ b = \pm 2, ab = -6 \\ &\iff a + ib \in \{3 - 2i, -3 + 2i\}. \end{aligned}$$

Déterminons les racines carrées de $-4i$. On a

$$\begin{aligned} (a+ib)^2 = -2i &\iff \begin{cases} a^2 - b^2 = 0 & \text{(parties réelles)} \\ 2ab = -2 & \text{(parties imaginaires)} \\ a^2 + b^2 = 2 & \text{(modules)} \end{cases} \\ &\iff a = \pm 1,\ b = \pm 1, ab = -1 \\ &\iff a + ib \in \{1 - i, -1 + i\}. \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'équation est donc

$$\{3 - 2i, -3 + 2i, 1 - i, -1 + i\}.$$

Exercice 4. (11 points en tout)

1. (a) (1 point) Par définition, on a

$$A\Delta\emptyset = (A \cup \emptyset) \setminus (A \cap \emptyset) = A \setminus \emptyset = A.$$

et

$$A\Delta E = (A \cup E) \setminus (A \cap E) = E \setminus A = \overline{A}.$$

(b) (1 point) On a

$$\begin{aligned} A\Delta B &= (A \cup B) \setminus (A \cap B) \\ &= (A \cup B) \cap \overline{(A \cap B)} \\ &= (A \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) \\ &= (A \cap \overline{A}) \cup (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) \cup (B \cap \overline{B}) \\ &= (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}), \end{aligned}$$

car $A \cap \overline{A} = B \cap \overline{B} = \emptyset$.

(c) (2 points) D'après la question précédente, on a

$$\begin{aligned} \overline{A\Delta B} &= \overline{(A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})} \\ &= \overline{(A \cap \overline{B})} \cap \overline{(B \cap \overline{A})} \\ &= (\overline{A} \cup \overline{\overline{B}}) \cap \overline{(B \cap \overline{A})} \\ &= (\overline{A} \cup B) \cap \overline{(\overline{A} \cap B)} \\ &= (\overline{A} \cup B) \setminus (\overline{A} \cap B) \\ &= \overline{A}\Delta B. \end{aligned}$$

Comme $A \cup B = B \cup A$ et $A \cap B = B \cap A$, on a $A\Delta B = B\Delta A$. Ainsi, les ensembles A et B étant arbitraires, on a aussi

$$\overline{A\Delta B} = \overline{B\Delta A} = \overline{B}\Delta A = A\Delta\overline{B}.$$

L'égalité $\overline{A}\Delta B = A\Delta\overline{B}$ appliquée avec $\overline{B}$ à la place de B donne que

$$\overline{A}\Delta\overline{B} = A\Delta\overline{\overline{B}} = A\Delta B,$$

comme voulu.

(d) (1,5 points) D'après la question 1.(b), on a

$$\begin{aligned} (A \cap B)\Delta(A \cap C) &= \big((A \cap B) \cap \overline{(A \cap C)}\big) \cup \big((A \cap C) \cap \overline{(A \cap B)}\big) \\ &= \big((A \cap B) \cap (\overline{A} \cup \overline{C})\big) \cup \big((A \cap C) \cap (\overline{A} \cup \overline{B})\big) \\ &= \big(\emptyset \cup (A \cap B \cap \overline{C})\big) \cup \big(\emptyset \cup (A \cap C \cap \overline{B})\big) \\ &= A \cap \big((B \cap \overline{C}) \cup (C \cap \overline{B})\big) \\ &= A \cap (B\Delta C). \end{aligned}$$

(e) (2,5 points) Soit X une partie de E. On a

$$\begin{aligned} A\Delta X = \emptyset &\iff (A \cup X) \setminus (A \cap X) = \emptyset \\ &\iff A \cup X \subset A \cap X \\ &\iff (A \subset X \quad \text{et} \quad X \subset A) \\ &\iff A = X. \end{aligned}$$

En effet, la troisième équivalence s'obtient en remarquant que A et X sont inclus dans $A \cup X$, et que $A \cap X$ est inclus dans A et dans X.

On a aussi

$$\begin{aligned} A\Delta X = E &\iff (A \cup X) \setminus (A \cap X) = E \\ &\iff A \cup X = E \quad \text{et} \quad A \cap X = \emptyset \\ &\iff \overline{A} \subset X \quad \text{et} \quad X \subset \overline{A} \\ &\iff X = \overline{A}. \end{aligned}$$

(f) (1 point) D'après les questions précédentes, on a

$$\begin{aligned} A\Delta(A\Delta B) &= \big(A \cap \overline{(A\Delta B)}\big) \cup \big((A\Delta B) \cap \overline{A}\big) \\ &= \big(A \cap (\overline{A}\Delta B)\big) \cup \big((A \cap \overline{A})\Delta(\overline{A} \cap B)\big) \\ &= \big(A \cap \overline{A})\Delta(A \cap B)\big) \cup \big(\emptyset\Delta(\overline{A} \cap B)\big) \\ &= \big(\emptyset\Delta(A \cap B)\big) \cup (\overline{A} \cap B) \\ &= (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B) \\ &= (A \cup \overline{A}) \cap B \\ &= E \cap B \\ &= B. \end{aligned}$$

2. (2 points : 1 point par question) La réponse la plus courte aux questions 2.(a) et 2.(b) consiste à remarquer que, d'après la question 1.(f), pour toute partie X de E, on a $A\Delta(A\Delta X) = X$ et donc

$$(\phi \circ \phi)(X) = \phi\big(\phi(X)\big) = \phi(A\Delta X) = A\Delta(A\Delta X) = X.$$

Ainsi on a $\phi \circ \phi = \mathrm{Id}_{\mathfrak{P}(E)}$ donc l'application ϕ est bijective (donc injective) et admet pour application réciproque $\phi^{-1} = \phi$.

Néanmoins, on pouvait aussi répondre à la question 2.(a) en montrant que si X et Y sont deux parties de E, alors on a

$$A\Delta X = A\Delta Y \Longrightarrow X = Y.$$