Université Claude Bernard-Lyon 1 — Semestre d'automne 2016-2017

Fondamentaux des mathématiques 1

CCP DS2 19 octobre 2016

Problème 2

Exercice 1. (Cours)

Soient (P) et (Q) deux assertions. Démontrer que l'on a les équivalences logiques suivantes :

$$\text{non}\big((P) \text{ ou } (Q)\big) \equiv \big(\text{non}(P) \text{ et } \text{non}(Q)\big)$$

$$\text{non}\big((P) \text{ et } (Q)\big) \equiv \big(\text{non}(P) \text{ ou } \text{non}(Q)\big)$$

Ce sont les lois de Morgan pour les assertions.

Soient (P), (Q) et (R) trois assertions. Démontrer que l'on a les équivalences logiques suivantes :

$$(P) \text{ ou } \big((Q) \text{ et } (R)\big) \equiv \big((P) \text{ ou } (Q)\big) \text{ et } \big((P) \text{ ou } (R)\big)$$

$$(P) \text{ et } \big((Q) \text{ ou } (R)\big) \equiv \big((P) \text{ et } (Q)\big) \text{ ou } \big((P) \text{ et } (R)\big)$$

Correction exercice 1 :

Démonstration

(P)	(Q)	$\big((P)$ ou $(Q)\big)$	non$\big((P)$ ou $(Q)\big)$
(V)	(V)	(V)	(F)
(V)	(F)	(V)	(F)
(F)	(V)	(V)	(F)
(F)	(F)	(F)	(V)

(P)	(Q)	non(P)	non(Q)	non(P) et non(Q)
(V)	(V)	(F)	(F)	(F)
(V)	(F)	(F)	(V)	(F)
(F)	(V)	(V)	(F)	(F)
(F)	(F)	(V)	(V)	(V)

(P)	(Q)	$\big((P)$ et $(Q)\big)$	non$\big((P)$ et $(Q)\big)$
(V)	(V)	(V)	(F)
(V)	(F)	(F)	(V)
(F)	(V)	(F)	(V)
(F)	(F)	(F)	(V)

(P)	(Q)	non(P)	non(Q)	non(P) ou non(Q)
(V)	(V)	(F)	(F)	(F)
(V)	(F)	(F)	(V)	(V)
(F)	(V)	(V)	(F)	(V)
(F)	(F)	(V)	(V)	(V)

(P)	(Q)	(R)	(Q) ou (R)	(P) et $\big((Q)$ ou $(R)\big)$
(V)	(V)	(V)	(V)	(V)
(V)	(V)	(F)	(V)	(V)
(V)	(F)	(V)	(V)	(V)
(V)	(F)	(F)	(F)	(F)
(F)	(V)	(V)	(V)	(F)
(F)	(V)	(F)	(V)	(F)
(F)	(F)	(V)	(V)	(F)
(F)	(F)	(F)	(F)	(F)

(P)	(Q)	(R)	(P) et (Q)	(P) et (R)	$\big((P)$ et $(Q)\big)$ ou $\big((P)$ et $(R)\big)$
(V)	(V)	(V)	(V)	(V)	(V)
(V)	(V)	(F)	(V)	(F)	(V)
(V)	(F)	(V)	(F)	(V)	(V)
(V)	(F)	(F)	(F)	(F)	(F)
(F)	(V)	(V)	(F)	(F)	(F)
(F)	(V)	(F)	(F)	(F)	(F)
(F)	(F)	(V)	(F)	(F)	(F)
(F)	(F)	(F)	(F)	(F)	(F)

(P)	(Q)	(R)	(Q) et (R)	(P) ou $\big((Q)$ et $(R)\big)$
(V)	(V)	(V)	(V)	(V)
(V)	(V)	(F)	(F)	(V)
(V)	(F)	(V)	(F)	(V)
(V)	(F)	(F)	(F)	(V)
(F)	(V)	(V)	(V)	(V)
(F)	(V)	(F)	(F)	(F)
(F)	(F)	(V)	(F)	(F)
(F)	(F)	(F)	(F)	(F)

(P)	(Q)	(R)	(P) ou (Q)	(P) ou (R)	$\big((P)$ ou $(Q)\big)$ et $\big((P)$ ou $(R)\big)$
(V)	(V)	(V)	(V)	(V)	(V)
(V)	(V)	(F)	(V)	(V)	(V)
(V)	(F)	(V)	(V)	(V)	(V)
(V)	(F)	(F)	(V)	(V)	(V)
(F)	(V)	(V)	(V)	(V)	(V)
(F)	(V)	(F)	(V)	(F)	(F)
(F)	(F)	(V)	(F)	(V)	(F)
(F)	(F)	(F)	(F)	(F)	(F)

Les tables de vérités sont bien les mêmes à chaque fois.

Exercice 2. (application directe du cours)

Soit $n \in \mathbb{N}$. (n^2 pair $\Rightarrow n$ pair) $\equiv$ (n impair $\Rightarrow n^2$ impair)

Montrer que ces prédicats sont logiquement équivalents et vrais.

Correction exercice 2 :

Comme non(n^2 pair) $\equiv$ (n^2 impair) et non(n pair) $\equiv$ (n impair)

Ces deux prédicats sont la contraposée l'un de l'autre donc ils sont logiquement équivalent.

A ce stade on ne toujours pas si ces prédicats sont vrais ou faux, mais ils sont tous les deux vrais ou tous les deux faux. Le premier n'est pas forcément évident à montrer car s'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $n^2 = 2p$ on ne voit pas immédiatement pourquoi il existerait $q \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2q$, par contre si n est impair il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2p + 1$ et alors $n^2 = 4p^2 + 4p + 1 = 2(2p^2 + 2p) + 1$, comme $2p^2 + 2p \in \mathbb{N}$, n^2 est impair donc le prédicat (n impair $\Rightarrow n^2$ impair) est vrai et donc le prédicat (n^2 pair $\Rightarrow$ n pair) est vrai.

Exercice 3.

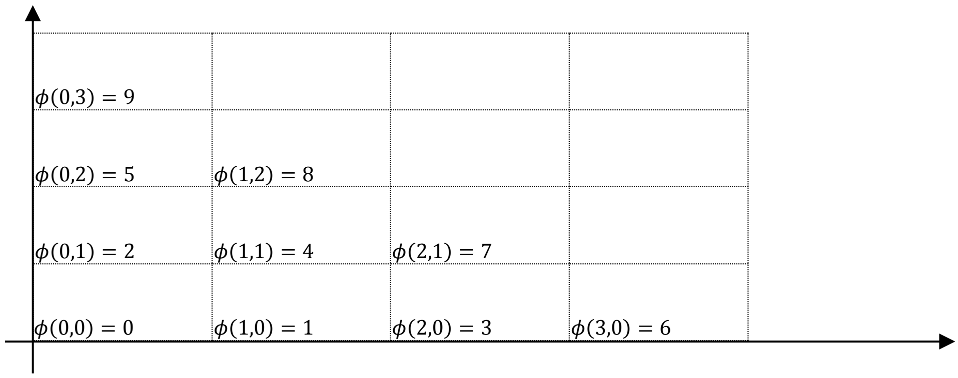
On pose pour tout couple de $\mathbb{N}^2$, $\phi(s,t) = \frac{(s+t)(s+t+1)}{2} + t$

1. On place s en abscisse et t en ordonnée, placer les valeurs de $\phi(i,j)$ sur les points correspondants :
$$\phi(0,0); \phi(1,0); \phi(0,1); \phi(2,0); \phi(1,1); \phi(0,2); \phi(3,0); \phi(2,1); ; \phi(1,2) \text{ et } \phi(0,3)$$
2. Ecrire $\phi(s,t)$ à l'aide d'une somme d'entiers.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique $p \in \mathbb{N}$ tel que :
$$\sum_{k=1}^{p} k \leq n < \sum_{k=1}^{p+1} k$$
4. Pour un $n \in \mathbb{N}$. On pose
$$t = n - \sum_{k=1}^{p} k \quad \text{et} \quad s = p - n + \sum_{k=1}^{p} k$$
Calculer $\phi(s,t)$. Que vient-on de montrer ?
5. Soient (s_1, t_1) et (s_2, t_2) deux couples de $\mathbb{N}^2$ tels que : $\phi(s_1, t_1) = \phi(s_2, t_2)$.
Montrer que $(s_1, t_1) = (s_2, t_2)$
Indication : on pourra comparer $s_1 + t_1$ et $s_2 + t_2$ et faire différents cas.
6. Montrer que le « p » trouvé au 3. vaut
$$E\left(\sqrt{2n + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2}\right)$$
Où E désigne la partie entière.
7. Montrer que ϕ est bijective et donner ϕ^{-1}. (C'est-à dire $\phi^{-1}(n)$ en fonction de n)
8. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on définit des applications ϕ_k de $\mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ de la façon suivante :
$$\forall x \in \mathbb{N}: \phi_1(x) = x$$
$$\forall k \geq 2, \forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{N}^k, \phi_k(x_1, x_2, \dots, x_n) = \phi\big(x_1, \phi_{k-1}(x_2, \dots, x_k)\big)$$
   a. Vérifier que $\phi_2 = \phi$.
   b. Montrer que pour tout $k \geq 1$, ϕ_k est une bijection de $\mathbb{N}^k$ sur $\mathbb{N}$

9. On rappelle que $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ est l'ensemble des application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, le but de cet exercice est de montrer qu'il n'y a pas de bijection de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ sur $\mathbb{N}$. Pour cela on va montrer qu'il n'y a pas de surjection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.
   On suppose qu'il existe $\varphi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ qui soit surjective. Pour cela on considérera la fonction $h: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $h(n) = \big(\varphi(n)\big)(n) + 1$. En rappelant que $\varphi(n)$ est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. Montrer que h n'a pas d'antécédent. Conclusion ?

Correction exercice 1.

1.



2.
$$\phi(s,t) = \frac{(s+t)(s+t+1)}{2} + t = \sum_{k=1}^{s+t} k + t$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique $p \in \mathbb{N}$ tel que :
$$\sum_{k=1}^{p} k = 1 + \cdots + p \leq n < \sum_{k=1}^{p+1} k = 1 + \cdots + p + (p+1)$$
   En effet la suite $\sum_{k=1}^{p} k$ prend des valeurs strictement croissantes donc les intervalles $[\sum_{k=1}^{p} k, \sum_{k=1}^{p+1} k[$ forment une partition de $\mathbb{N}$ par conséquent chaque entier $n \in \mathbb{N}$ appartient à un de ces intervalles un seul.

4. On pose $t = n - \sum_{k=1}^{p} k = n - \frac{p(p+1)}{2}$ et $s = p - n + \frac{p(p+1)}{2}$ donc $s + t = p$
   Par conséquent $\phi\left(p + \frac{p(p+1)}{2} - n, n - \frac{p(p+1)}{2}\right) = \frac{p(p+1)}{2} + n - \frac{p(p+1)}{2} = n$
   On a montré que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $s = p - n + \frac{p(p+1)}{2}$ et $t = n - \frac{p(p+1)}{2}$ tel que $\phi(s,t) = n$.
   On a montré que ϕ était surjective mais on n'a pas montré la bijectivité de ϕ (l'unicité du couple (s,t) est encore à montrer).

5. Soient (s_1, t_1) et (s_2, t_2) deux couples de $\mathbb{N}^2$ tels que : $\phi(s_1, t_1) = \phi(s_2, t_2) = n$.
$$\frac{(s_1+t_1)(s_1+t_1+1)}{2} + t_1 = \frac{(s_2+t_2)(s_2+t_2+1)}{2} + t_2 \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{s_1+t_1} k + t_1 = \sum_{k=0}^{s_2+t_2} k + t_2$$
   Supposons que $t_1 + s_1 < t_2 + s_2$
$$\sum_{k=0}^{s_1+t_1} k + t_1 = \sum_{k=0}^{s_2+t_2} k + t_2 \Leftrightarrow t_1 - t_2 = \sum_{k=0}^{s_2+t_2} k - \sum_{k=0}^{s_1+t_1} k = \sum_{k=s_1+t_1+1}^{s_2+t_2} k$$
   Donc
$$t_1 - t_2 = \sum_{k=s_1+t_1+1}^{s_2+t_2} k \geq s_2 + t_2 > s_1 + t_1$$
   Donc $t_1 - t_2 > s_1 + t_1$, cela entraine que $-t_2 > s_1$, ce qui est impossible car $s_1 > 0$.
   Si $t_1 + s_1 > t_2 + s_2$ alors le même raisonnement entraine une impossibilité.

Donc $t_1 + s_1 = t_2 + s_2$ par conséquent $\sum_{k=0}^{s_1+t_1} k = \sum_{k=0}^{s_2+t_2} k$ et alors $t_1 = t_2$ ce qui entraine que $s_1 = s_2$, on a bien $(s_1, t_1) = (s_2, t_2)$ cela montre que ϕ est injective.

6.

$$\sum_{k=1}^{p} k \leq n < \sum_{k=1}^{p+1} k \Leftrightarrow \frac{p(p+1)}{2} \leq n < \frac{(p+1)(p+2)}{2} \Leftrightarrow p^2 + p \leq 2n < p^2 + 3p + 2$$

$$\Leftrightarrow \left(p + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \leq 2n < \left(p + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \Leftrightarrow \left(p + \frac{1}{2}\right)^2 \leq 2n + \frac{1}{4} < \left(p + \frac{3}{2}\right)^2 \Leftrightarrow p + \frac{1}{2}$$
$$\leq \sqrt{2n + \frac{1}{4}} < p + \frac{3}{2} \Leftrightarrow p \leq \sqrt{2n + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} < p + 1 \Leftrightarrow p = E\left(\sqrt{2n + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2}\right)$$

7. D’après 4. ϕ est surjective, d’après 5. elle injective et donc bijective.

$$\phi^{-1}: \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$$

D’après 4. et 6. ϕ^{-1} est définie par :

$$\phi^{-1}(n) = \left(E\left(\sqrt{2n + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2}\right) - n + \frac{E\left(\sqrt{2n + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2}\right)\left(E\left(\sqrt{2n + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2}\right) + 1\right)}{2}, n - \frac{E\left(\sqrt{2n + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2}\right)\left(E\left(\sqrt{2n + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2}\right) + 1\right)}{2} \right)$$

Remarque

Sur un dessin il est évident que ϕ est bijective (voir figue du 1.), en effet.

On part du point $(0,0)$ on lui attribue la valeur 0, puis on repart du point $(1,0)$ et on lui attribue la valeur 1, on remonte en haut à gauche sur le point $(1,0)$, on lui attribue la valeur 2, on repart du point $(2,0)$, on lui attribue la valeur 3, puis on remonte en haut à gauche sur le point $(1,1)$ puis le point $(2,0)$ auxquels on attribue les valeurs 4 puis 5, on repart du point $(3,0)$ et on remonte en haut à gauche et on continue. Cela montre qu’à chaque entier on associe un unique couple de $\mathbb{N}^2$ et qu’à chaque couple de $\mathbb{N}^2$ on associe un unique entier. C’est qu’il y a une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}^2$.

8.

a. $\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{N}^2 \phi_2(x_1, x_2) = \phi(x_1, \phi_1(x_2)) = \phi(x_1, x_2)$,car $\phi_1(x_2) = x_2$, par conséquent

$$\phi_2 = \phi$$

b. Par construction ϕ_k est bien une application de $\mathbb{N}^k$ dans $\mathbb{N}$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, soit (H_k) l’hypothèse de récurrence « $\phi_k: \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ est bijective »

Si $k = 1$, ϕ_1 est l’identité de $\mathbb{N}$ donc ϕ_1 est bijective, (H_1) est vraie.

Montrons que si pour tout $k \geq 1$, $(H_k) \Rightarrow (H_{k+1})$ est vraie.

On pose $n = \phi_{k+1}(x_1, x_2, \dots, x_{k+1})$

$$n = \phi_{k+1}(x_1, x_2, \dots, x_{k+1}) = \phi(x_1, \phi_k(x_2, \dots, x_{k+1})) = \phi(x_1, y_1)$$

Avec $y_1 = \phi_k(x_2, \dots, x_{k+1})$

Comme ϕ est bijective, il existe un unique couple $(x_1, y_1) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n = \phi(x_1, y_1)$

D’après l’hypothèse de récurrence, ϕ_k est bijective, donc il existe un unique k-uplet $(x_2, \dots, x_{k+1})$ d’entiers naturels tel que $y_1 = \phi_k(x_2, \dots, x_{k+1})$. Ce qui montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique $k+1$-uplet d’entiers naturels tel que $n = \phi_{k+1}(x_1, x_2, \dots, x_{k+1})$, par conséquent ϕ_{k+1} est bijective.

On a bien montré que $(H_k) \Rightarrow (H_{k+1})$ est vraie, d’où, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, ϕ_k est une bijection

9. Soit h une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, si on suppose de φ est surjective, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $h = \varphi(p)$, attention h et $\varphi(p)$ sont des applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. Par conséquent on applique $n \in \mathbb{N}$ à cette égalité de fonction.

$$h(n) = (\varphi(p))(n)$$

Ce qui entraine pour $p = n$ à

$$\big(\varphi(n)\big)(n) + 1 = \big(\varphi(n)\big)(n)$$

D’où $1 = 0$, ce qui est impossible, donc φ n’est pas surjective puisque la fonction h proposée n’a pas d’antécédent. Donc φ n’est pas bijective.