Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre automne 2016-2017

Cursus prépa – Première année

Fondamentaux des Mathématiques – DS n° 1

PARTIE COMMUNE

<u>Exercice 1.</u>

1. – Factoriser les polynômes $x^2 + 5x + 6$ et $x^2 + x - 6$.
   – Trouver l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ qui vérifient
$$\frac{2x+3}{x^2+5x+6} \geq \frac{x}{x^2+x-6}.$$
2. – Prouver que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a l'inégalité $x^2 + xy + y^2 \geq 0$.
   – On considère le polynôme $P(x) = x^4 - x^3 + 2x^2 - 8x$. Trouver deux nombres réels b et c tels que $P(x) = x\,(x-2)\,(x^2 + bx + c)$.
   – Trouver l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tels qu'on ait $P(x) \leq 0$.
3. Prouver que, pour tout $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$, on a l'inégalité suivante :
$$(ab + cd)^2 \leq (a^2 + c^2)\,(b^2 + d^2).$$
   Utiliser ce résultat pour prouver, par récurrence (et donc d'une façon différente de celle vue en TD), l'inégalité de Cauchy-Schwarz : pour tout $(x_1 \dots x_n)$ et $(y_1 \dots y_n)$ dans $\mathbb{R}^n$, on a
$$\left|\sum_{j=1}^{n} x_j\, y_j\right| \leq \left(\sum_{j=1}^{n} (x_j)^2\right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^{n} (y_j)^2\right)^{1/2}.$$

Solution

1. On a $x^2 + 5x + 6 = (x+2)\,(x+3)$ et $x^2 + x - 6 = (x-2)\,(x+3)$. Donc, l'inégalité à prouver est équivalente à
$$\frac{(2x+3)\,(x-2) - x\,(x+2)}{(x-2)\,(x+2)\,(x+3)} \geq 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{x^2 - 3x - 6}{(x-2)\,(x+2)\,(x+3)} \geq 0.$$
   Les racines du numérateur sont
$$x_1 = \frac{3 - \sqrt{33}}{2} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{3 + \sqrt{33}}{2}.$$
   On remarque que $-3/2 < x_1 < -1$ et $4 < x_2 < 9/2$. On résout l'inégalité en faisant un tableau des signes., et on trouve
$$S =]-3, -2[\, \cup \, [x_1, 2[\, \cup \, [x_2, +\infty[.$$
2. Pour l'inégalité à prouver, on a deux cas :
   – $xy \geq 0$: dans ce cas, $x^2 + xy + y^2 \geq 0$ facilement ;
   – $xy < 0$: dans ce cas, $x^2 + xy + y^2 = x^2 + 2xy + y^2 - xy = (x+y)^2 - xy \geq 0$ encore.

Après, en développant les produits et en comparant les deux polynômes à droite et à gauche de l'égalité, on trouve $b = 1$ et $c = 4$.

En utilisant la question précédente, on voit que $x^2 + x + 4 > x^2 + x + 1 \geq 0$. Donc le signe de P dépend du produit $x\,(x - 2)$, qui est négatif quand $0 \leq x \leq 2$.

3. En développant le carré à gauche et les produits à droite, on voit que l'inégalité à prouver est équivalente à montrer que

$$2\,a\,b\,c\,d \;\leq\; a^2\,d^2 \,+\, b^2\,c^2\,.$$

Mais ça est toujours vrai, parce qu'on a, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, l'inégalité $2xy \;\leq\; x^2 + y^2$.

On passe à la preuve de Cauchy-Schwarz par récurrence. Le cas $n = 1$ donne

$$|x_1\,y_1| \;\leq\; |x_1| \,\cdot\, |y_1|\,,$$

ce qui est évidemment vrai.

On suppose maintenant que la propriété est vraie pour n. Pour $n + 1$, on a

$$\begin{aligned} \left|\sum_{j=1}^{n+1} x_j\,y_j\right| \quad &= \quad \left|\sum_{j=1}^{n} x_j\,y_j \,+\, x_{n+1}\,y_{n+1}\right| \\ &\leq \quad \left|\left(\sum_{j=1}^{n}(x_j)^2\right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^{n}(y_j)^2\right)^{1/2} \,+\, x_{n+1}\,y_{n+1}\right|\,, \end{aligned}$$

grâce à l'hypothèse de récurrence. Maintenant, on conclut en utilisant l'inégalité précédente, avec

$$a \;=\; \left(\sum_{j=1}^{n}(x_j)^2\right)^{1/2}\,, \qquad\qquad b \;=\; \left(\sum_{j=1}^{n}(y_j)^2\right)^{1/2}$$

et $c \;=\; x_{n+1}$, $d \;=\; y_{n+1}$.

<u>Exercice 2.</u>

Soient $n \geq 1$ et $m \geq 1$ deux nombres naturels.

Dans une salle on a m tables ; n enfants doivent entrer dans la salle et se disposer autour d'une table. Plusieurs enfants peuvent être autour de la même table.

(Q1) Calculer le nombre de façons possibles dans lesquelles les enfants peuvent se disposer.

Maintenant, on donne la règle que, autour d'une table, on ne peut pas avoir plus qu'un seul enfant.

(Q2) Donner une condition nécessaire reliant n et m, pour que ça soit possible.

(Q3) Sous cette condition, calculer le nombre de dispositions possibles.

Solution

(Q1) Chaque étudiant a m possibilité, et le choix de l'un n'affecte pas le choix de l'autre. En total, on a donc m^n configurations possibles.

(Q2) Il faut que $m \geq n$.

(Q3) Le premier choisit une table : m possibilité. Le deuxième aura donc $m - 1$ choix possibles ; le troisième $m - 2$... Le nombre total de dispositions pssibles est donc

$$m\,(m-1)\,(m-2)\,\cdots\,(m-n+1) \;=\; \frac{m!}{(m-n)!}\,.$$

Exercice 3.

1. – Donner la forme algébrique du nombre complexe z défini par
$$z = \frac{5-i}{2-3i}\,.$$
   – Calculer son conjugué, son module et un de ses arguments.
   – Calculer les deux racines carrées de z par deux méthodes, celle algébrique et celle trigonométrique. En déduire la valeur de $\cos(\pi/8)$ et $\sin(\pi/8)$.
2. Trouver l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tels que
$$\frac{iz-1}{z-i}$$
soit un nombre imaginaire pur.
3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + 4z + 13 = 0$.

Solution

1. On a
$$z = \frac{5-i}{2-3i} = \frac{(5-i)\,(2+3i)}{2^2+3^2} = 1+i\,.$$
Donc, $\overline{z} = 1-i$, $|z| = \sqrt{2}$ et $\arg z = \theta = \pi/4$.
Méthode algébrique : il faut résoudre le système
$$\begin{cases} x^2+y^2 = \sqrt{2} \\ x^2-y^2 = 1 \\ 2xy = 1 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} x = \pm\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} \\ y = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} \\ xy > 0\,. \end{cases}$$
Les solutions de l'équation $w^2 = z$ sont donc
$$w_1 = \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} + \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} \qquad \text{et} \qquad w_2 = -w_1\,.$$
Méthode trigonométrique : il faut résoudre, cette fois,
$$\begin{cases} \rho^2 = \sqrt{2} \\ 2\,\sigma = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} \rho = 2^{1/4} \\ \sigma = \pi/8 + k\,\pi\,, \end{cases}$$
avec $k = 0\,,\ 1$. On trouve donc
$$w_1 = 2^{1/4}\,e^{i\,\pi/8} \qquad \text{et} \qquad w_2 = 2^{1/4}\,e^{i\,\pi\,9/8} = -\,2^{1/4}\,e^{i\,\pi/8}\,.$$
En comparant les deux expressions trouvées pour w_1 (vu que $0 < \pi/8 < \pi/2$), on trouve facilement
$$\cos(\pi/8) = \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}} \qquad \text{et} \qquad \sin(\pi/8) = \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}}\,.$$
2. Avant tout, il faut que $z \neq i$. Après, on écrit
$$\frac{iz-1}{z-i} = \frac{(iz-1)\,(\overline{z}+i)}{|z|^2+1} = \frac{i\left(|z|^2-1\right) - z - \overline{z}}{|z|^2+1}\,.$$
Donc, cette fraction est un nombre imaginaire pure si et seulement si $z+\overline{z} = 2\Re(z) = 0$, c'est-à-dire si et seulement si z est déjà un nombre imaginaire pure différent que i : $z = \xi\,i$, avec $\xi \neq 1$.

3. On utilise le produit remarquable de la différence des carrés : on a

$$z^2 + 4z + 13 = z^2 + 4z + 4 + 9 = (z+2)^2 - (3\,i)^2 = (z+2+3i)\,(z+2-31)\,.$$

Donc, les racines complexes de cette équation sont $z_1 = -2+3i$ et $z_2 = -2-3i$.

<u>Exercice 4.</u>

1. Soit $w = (\sqrt{3}/2) + (1/2)i$. Calculer son module et en déduire que $1/w = \overline{w}$.
2. Calculer la quantité $(w+\overline{w})^2$. En déduire que w est une solution de l'équation $z^4 - z^2 + 1 = 0$. Trouver une autre solution de cette équation.
3. Prouver que toute solution de l'équation $z^4 - z^2 + 1 = 0$ vérifie $z^6 = -1$.

Solution

1. Des calculs faciles donnent $|w|^2 = 1$. Vu que $|w|^2 = w\cdot\overline{w}$, cela implique tout de suite que $\overline{w} = 1/w$.
2. On a $(w + \overline{w})^2 = \big(2\,\Re(w)\big)^2 = (2\sqrt{3}/2)^2 = 3$. D'autre côté, pour le point précédent on a aussi

$$(w + \overline{w})^2 = \left(w + \frac{1}{w}\right)^2 = \frac{1}{w^2}\,\big(w^2+1\big)^2 = \frac{1}{w^2}\,\big(w^4 + 2\,w^2 + 1\big)\,,$$

d'où on trouve $w^4 + 2w^2 + 1 = 3w^2$, qui implique évidemment $w^4 - w^2 + 1 = 0$.
3. Si z vérifie la rélation $z^4 - z^2 + 1 = 0$, en multipliant les deux côté de l'équation par z^2 on trouve

$$z^6 - z^4 + z^2 = 0\,.$$

Mais la rélation précédente nous dit aussi que $z^4 - z^2 = -1$, et si on remplace dans l'équation ci-dessus, on obtient

$$z^6 - (z^4 - z^2) = z^6 + 1 = 0\,.$$