Numéro de la feuille d'examen
à reporter ci-dessous :
N°

Exercice 1 :

(a) La fonction $f : (x,y) \mapsto e^{x^2-y^2}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$, et en particulier $\mathcal{C}^2$, sur $\mathbb{R}^2$ comme composée de la fonction polynomiale $(x,y) \mapsto x^2-y^2$ et de la fonction exponentielle.

(b) Un point critique (x,y) de f est caractérisé par

$$\nabla f(x,y) = 0_{\mathbb{R}^2}, \quad \text{avec} \quad \nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} e^{x^2-y^2}(2x) \\ e^{x^2-y^2}(-2y) \end{pmatrix}.$$

La fonction exponentielle ne s'annulant pas, le seul point critique de f est $(x,y)=(0,0)$.
Pour déterminer sa nature, on calcule

$$\text{Hess} f(x,y) = \begin{pmatrix} 2e^{x^2-y^2}(1+x) & -4e^{x^2-y^2}xy \\ -4e^{x^2-y^2}xy & -2e^{x^2-y^2}(1+y) \end{pmatrix},$$

ce qui donne en particulier :

$$\text{Hess} f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de cette matrice diagonale étant 2 et -2, le point critique $(0,0)$ est un point selle pour f.
(On remarque que l'application partielle $x \mapsto f(x,0) = e^{x^2}$ admet un minimum en 0, tandis que l'application partielle $y \mapsto f(0,y) = e^{-y^2}$ admet un maximum en 0.)

(c) Le cercle unité S étant compact (car fermé et borné), la fonction f est bornée et atteint ses bornes sur S.
Autrement dit, elle admet un minimum global et un maximum global sur S.

.../...

(d) Les points (x,y) où f atteint ses bornes sur S sont tels qu'il existe un réel λ ;

$$\nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y),$$

où $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$. Comme $\nabla g(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$,

on en déduit le système $\begin{cases} 2e^{x^2-y^2}x = \lambda x, \\ -2e^{x^2-y^2}y = \lambda y, \end{cases}$

avec $x^2+y^2=1$. On élimine λ en faisant la somme des carrés des deux lignes, d'où $\lambda^2 = 4e^{2(x^2-y^2)}$, et par suite $\lambda = 2e^{x^2-y^2}$ ou $\lambda = -2e^{x^2-y^2}$.

En reportant l'une ou l'autre de ces deux valeurs dans le système, on obtient soit

$$\begin{cases} x = x, \\ -y = y, \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} x = -x, \\ y = y. \end{cases}$$

Le premier cas correspond aux deux points du cercle $(1,0)$ et $(-1,0)$, et le second cas à $(0,1)$ et $(0,-1)$.

On observe que, pour tout $(x,y) \in S$,

$$f(x,y) = e^{x^2+y^2-2y^2} = e \times e^{-2y^2}$$
$$= e^{2x^2-x^2-y^2} = e^{-1} \times e^{2x^2}.$$

Ceci montre que f atteint son minimum sur S en $(0,1)$ et $(0,-1)$, et son maximum sur S en $(1,0)$ et $(-1,0)$.

Numéro de la feuille d'examen

à reporter ci-dessous :

N°

Exercice 2 :

(a) La fonction $h : (x,y) \mapsto e^{x^2-y^2}\cos(2xy)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$, et en particulier $\mathcal{C}^2$, sur $\mathbb{R}^2$ comme produit de deux fonctions $\mathcal{C}^2$:
La première, $(x,y) \mapsto e^{x^2-y^2}$ est la composée de la fonction polynomiale $(x,y) \mapsto x^2-y^2$ et de la fonction exponentielle.
La seconde, $(x,y) \mapsto \cos(2xy)$ est la composée de la fonction polynomiale $(x,y) \mapsto 2xy$ et de la fonction cosinus.

(b) On a, par définition du gradient, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\nabla h(x,y) = \begin{pmatrix} \partial_x h(x,y) = e^{x^2-y^2}\left(2x\cos(2xy) - 2y\sin(2xy)\right) \\ \partial_y h(x,y) = e^{x^2-y^2}\left(-2y\cos(2xy) - 2x\sin(2xy)\right) \end{pmatrix}$$

(c) Un point critique de h est caractérisé par $\nabla h(x,y) = 0_{\mathbb{R}^2}$
c'est-à-dire que c'est une solution du système (non-linéaire) :

$$\begin{cases} 2e^{x^2-y^2}\left(x\cos(2xy) - y\sin(2xy)\right) = 0, \\ 2e^{x^2-y^2}\left(y\cos(2xy) + x\sin(2xy)\right) = 0. \end{cases}$$

Comme la fonction exponentielle ne s'annule pas, ce système équivaut à :
$$\begin{cases} x\cos(2xy) - y\sin(2xy) = 0, \\ x\sin(2xy) + y\cos(2xy) = 0. \end{cases}$$
En effectuant l'opération $\cos(2xy) \times L1 + \sin(2xy) \times L2$, où $L1$ et $L2$ désignent respectivement la $1^{ère}$ et la $2^{ème}$ ligne, on obtient : $x\left(\cos^2(2xy) + \sin^2(2xy)\right) = 0$,
d'où $x = 0$.
De façon analogue, l'opération $-\sin(2xy) \times L1 + \cos(2xy) \times L2$ implique $y = 0$.
Par suite, le seul point critique de h est $(x,y) = (0,0)$.

.../...

(c) Pour déterminer la nature de $(0,0)$ comme point critique de h, on va calculer $\operatorname{Hess} h(0,0)$.

Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\operatorname{Hess} h(x,y) = \begin{pmatrix} \partial_x^2 h(x,y) & \partial_{xy}^2 h(x,y) \\ \partial_{yx}^2 h(x,y) & \partial_y^2 h(x,y) \end{pmatrix}$

$$= 2e^{x^2-y^2} \begin{pmatrix} (1+2x^2-2y^2)c - 4xys & -(1+2x^2-2y^2)s - 4xyc \\ -(1+2x^2-2y^2)s - 4xyc & -(1+2x^2-2y^2)c + 4xys \end{pmatrix},$$

où on a noté pour simplifier : $c = \cos(2xy)$, $s = \sin(2xy)$.

D'où, pour $(x,y) = (0,0)$,

$$\operatorname{Hess} h(0,0) = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Donc les valeurs propres de $\operatorname{Hess} h(0,0)$ sont 2 et -2.
(On peut aussi se contenter de dire que $\det \operatorname{Hess} h(0,0) < 0$.)

Ceci montre que <u>h a un point selle en $(0,0)$.</u>

(On aurait pu le voir directement par un développement limité : puisque $e^u \underset{u\to 0}{=} 1 + u + o(u)$ et $\cos v \underset{v\to 0}{=} 1 + o(v)$, et que $|xy| \leq \frac{x^2+y^2}{2}$, $0 \leq x^2 \leq x^2+y^2$, $0 \leq y^2 \leq x^2+y^2$, on a :

$$h(x,y) = (1 + x^2 + o(x^2))(1 - y^2 + o(y^2))(1 + o(xy))$$
$$= 1 + x^2 - y^2 + o(x^2+y^2).\ )$$

Numéro de la feuille d'~~examen~~
à reporter ~~ci-dessous~~ :
~~N°~~

Exercice 3 : Attention, il fallait bien sûr lire $x^2+z^2=y^3(1-y)^3$ (ce qui se voyait en zoomant sur l'image).

(a) Si $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ est tel que $x^2+z^2=y^3(1-y)^3$ alors $y(1-y)\in\mathbb{R}^+$, ce qui équivaut à $y\in[0,1]$.
Par suite, $x^2+z^2\in[0,1]$ et donc $|x|\leq 1$ et $|z|\leq 1$.
Ceci montre que C est inclus dans la boule unité pour la norme $\|.\|_\infty$: il est donc borné.

(b) On cherche à appliquer le théorème des fonctions implicites.
Les points (x_0,y_0,z_0) cherchés sont tels que
$\partial_z g(x_0,y_0,z_0)\neq 0$, où $g(x,y,z)=x^2+z^2-y^3(1-y)^3$.
Comme $\partial_z g(x,y,z)=2z$, cette condition revient à $z_0\neq 0$.
On peut donc, d'après le théorème des fonctions implicites*, paramétrer localement C par (x,y) au voisinage de tout point $(x_0,y_0,z_0)\in C$ qui n'appartient pas au plan $\{(x,y,0)\,;\,(x,y)\in\mathbb{R}^2\}$.
* qui s'applique à g car elle est polynomiale donc de classe $\mathcal{C}^1$
(En $(x_0,y_0,0)$, le plan tangent à C a pour équation :
$$\partial_x g(x_0,y_0,0)\,(x-x_0)+\partial_y g(x_0,y_0,0)\,(y-y_0)=0,$$
et il est donc vertical.)

(c) De façon analogue, les points (x_0,y_0,z_0) au voisinage desquels C est paramétré par (y,z) sont tels que
$\partial_x g(x_0,y_0,z_0)\neq 0$, c'est-à-dire $x_0\neq 0$.

Ceux où C est paramétré par (x,z) sont tels que
$\partial_y g(x_0,y_0,z_0)\neq 0$, c'est-à-dire $y_0^2(1-y_0)^2(1-2y_0)\neq 0$.
Ceci exclut : – les extrémités $(0,0,0)$ et $(0,1,0)$
– les points du cercle $\Gamma=\left\{\left(x_0,\tfrac{1}{2},z_0\right)\,;\,x_0^2+z_0^2=\frac{1}{2^6}\right\}$

(d) La fonction $G : (x,y,z) \mapsto x+z$ est linéaire donc <u>continue</u>. De plus, C est <u>compact</u>, car borné et fermé (ce que l'on peut justifier en vérifiant que toute suite $((x_n,y_n,z_n))_{n\in\mathbb{N}} \in C^{\mathbb{N}}$ convergente a sa limite dans C, car on peut passer à la limite dans l'égalité $x_n^2+z_n^2 = y_n^3(1-y_n)^3$, par continuité de g).

Donc G est bornée et atteint ses bornes sur C.

(e) Les points de C où G atteint ses bornes sont les $(x,y,z) \in C$ tels qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ avec

$$\nabla G(x,y,z) = \lambda \nabla g(x,y,z).$$

Ceci équivaut à : $\begin{cases} 1 = 2\lambda x, \\ 0 = -3\lambda y^2(1-y)^2(1-2y), \\ 1 = 2\lambda z. \end{cases}$

Ce système implique $\lambda \neq 0$, d'après la 1ère équation par exemple, et donc $y \in \{0, 1, \frac{1}{2}\}$ d'après la 2ème équation. Comme on ne peut pas avoir $x=0$ ou $z=0$, d'après la 1ère et la 3ème équation, il reste seulement $y = \frac{1}{2}$, et donc $x^2+z^2 = \frac{1}{2^6}$. On déduit alors du système

$\begin{cases} 2\lambda x = 1, \\ 2\lambda z = 1, \end{cases}$ que $\lambda = \pm 4\sqrt{2}$ et $(x,z) = \pm\left(\frac{1}{8\sqrt{2}}, \frac{1}{8\sqrt{2}}\right)$.

Les points où G atteint ses bornes sur C sont donc :
$m = \left(-\frac{1}{8\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{8\sqrt{2}}\right)$ et $M\left(\frac{1}{8\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, \frac{1}{8\sqrt{2}}\right)$.

Ce sont les points d'intersections du cercle Γ défini à la question (c) et du plan d'équation $x=z$.

En remarquant que la fonction $(x,z) \mapsto x+z$ atteint son minimum en $\left(-\frac{1}{8\sqrt{2}}, -\frac{1}{8\sqrt{2}}\right)$ et son maximum en $\left(\frac{1}{8\sqrt{2}}, \frac{1}{8\sqrt{2}}\right)$ sur le cercle d'équation $x^2+z^2 = \frac{1}{2^6}$, on en déduit que G atteint son minimum en m et son maximum en M sur C.

Numéro de la feuille d'examen
à reporter ci-dessous :
N°

Exercice 4 :

Soit $F(x,y,z) = \left(x^2 + \frac{9}{4}y^2 + z^2 - 1\right)^3 - x^2 z^3 - \frac{9}{80} y^2 z^3$.

On a : $\begin{cases} \partial_x F(x,y,z) = 6x\left(x^2 + \frac{9}{4}y^2 + z^2 - 1\right)^2 - 2xz^3, \\ \partial_y F(x,y,z) = \frac{27}{2} y \left(x^2 + \frac{9}{4}y^2 + z^2 - 1\right)^2 - \frac{9}{40} y z^3, \\ \partial_z F(x,y,z) = 6z\left(x^2 + \frac{9}{4}y^2 + z^2 - 1\right)^2 - 3x^2 z^2 - \frac{27}{80} y^2 z^2. \end{cases}$

Si $F(x,y,z) = 0$ et $\partial_x F(x,y,z) \neq 0$, alors $x \neq 0$ et $z \neq 0$, nécessairement*. Par exemple, pour $(x_0, y_0, z_0) = (1,0,1)$, on a $F(x_0,y_0,z_0) = 0$ et $\partial_x F(x_0,y_0,z_0) \neq 0$. On peut alors appliquer le théorème des fonctions implicites à la fonction F, qui est de classe $\mathcal{C}^1$ car polynomiale :
l'ensemble $H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ F(x,y,z) = 0\}$ est localement paramétré par (y,z) au voisinage de $(1,0,1)$.

Si $F(x,y,z) = 0$ et $\partial_y F(x,y,z) \neq 0$, alors $y \neq 0$ et $z \neq 0$*. Par exemple, pour $(x_0,y_0,z_0) = (0, y_0, 1)$ tel que $F(x_0,y_0,z_0) = 0$, on a $\left(x_0^2 + \frac{9}{4}y_0^2 + z_0^2 - 1\right)^3 = \frac{9}{80}y_0^2$

et $\partial_y F(x_0,y_0,z_0) = \frac{27}{2} y_0 \left(x_0^2 + \frac{9}{4} y_0^2 + z_0^2 - 1\right)^2 - \frac{9}{40} y_0 =$

$\left(\frac{27}{2}\left(\frac{9}{80}y_0^2\right)^{2/3} - \frac{9}{40}\right) y_0 = \frac{9}{20} y_0 \neq 0$ si on a choisi $y_0 \neq 0$, solution de $\left(\frac{9}{4}y_0^2\right)^3 = \frac{9}{80}y_0^2$.

Ainsi, au voisinage d'un tel point $(0, y_0, 1)$, H est localement paramétré par (x,z).

* car $F(x,y,z) = 0$ et $z = 0$ entraînent $x^2 + \frac{9}{4}y^2 + z^2 - 1 = 0$.

Par des calculs analogues, on trouverait (x_0,y_0,z_0) tel que $F(x_0,y_0,z_0) = 0$ et $\partial_z F(x_0,y_0,z_0) \neq 0$. ...