Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2022-2023
Cursus préparatoire : Fondamentaux des Mathématiques 26 avril 2023

Devoir surveillé 4

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les réponses aux exercices doivent donc être clairement rédigées. Le détail des calculs doit apparaître sur la copie. La présentation doit être la plus soignée possible. Enfin, si vous pensez avoir repéré une erreur d'énoncé, signalez-le sur la copie et poursuivez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous avez été amené à prendre. La calculatrice est interdite.

Exercice 1

1. Résolvons l'équation
$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$$
d'inconnue $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbf{R}^3$. Il vient
$$\lambda_1(2e_1 - e_2) + \lambda_2(-e_1 + e_3) + \lambda_3(2e_1 - 2e_2 + e_3) = 0.$$
Soit
$$(2\lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3)e_1 + (-\lambda_1 - 2\lambda_3)e_2 + (\lambda_2 + \lambda_3)e_3 = 0$$
La famille (e_1, e_2, e_3) est libre, donc
$$\begin{cases} 2\lambda_1 - \lambda_2 & +2\lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 & -2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 & +\lambda_3 = 0 \end{cases}$$
Ce système se résout par substitution évidente. On obtient $\lambda_1 = -2\lambda_3$, $\lambda_2 = -\lambda_3$ et
$$2(-2\lambda_3) - (-\lambda_3) + 2\lambda_3 = 0$$
Et donc, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Ainsi, la famille (v_1, v_2, v_3) est libre.
2. Les vecteurs v_1, v_2, v_3 étant des combinaisons linéaires de (e_1, e_2, e_3), on a d'une part l'inclusion $Vect(v_1, v_2, v_3) \subset F$. D'autre part, $\dim(F) = \dim(Vect(v_1, v_2, v_3)) = 3$ car (e_1, e_2, e_3) est une base de F et (v_1, v_2, v_3) une base de $Vect(v_1, v_2, v_3)$. Ces deux faits impliquent que $F = Vect(v_1, v_2, v_3)$.
3. Par la formule de Grassmann, $\dim F + \dim G = \dim(\mathbf{R}^4) = 4$. Donc, $\dim(G) = 1$.
4. Comme $e_1 = (1, 2, 3, 4)$, $e_2 = (1, -2, 3, -4)$ et $e_3 = (0, 0, 0, 1)$, F est l'ensemble des vecteurs de la forme
$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 = (\lambda_1 + \lambda_2, 2\lambda_1 - 2\lambda_2, 3\lambda_1 + 3\lambda_2, 4\lambda_1 - 4\lambda_2 + \lambda_3),$$
où $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbf{R}^3$. Autrement dit, un vecteur $(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4$ appartient à F si et seulement si il existe une solution $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbf{R}^3$ du système
$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 & = x \\ 2\lambda_1 - 2\lambda_2 & = y \\ 3\lambda_1 + 3\lambda_2 & = z \\ 4\lambda_1 - 4\lambda_2 & +\lambda_3 = t \end{cases}$$
Par combinaisons linéaires avec la première ligne, ce système se reformule en
$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 & = x \\ \quad - 4\lambda_2 & = y - 2x \\ 0 & = z - 3x \\ \quad - 8\lambda_2 & +\lambda_3 = t - 4x \end{cases}$$
On pourrait continuer à échelonner mais on observe sans autre calcul que le système peut être résolu si et seulement si $z - 3x = 0$. Et donc F est l'ensemble des solutions de l'équation
$$z - 3x = 0. \tag{1}$$

5. Notons que ni le vecteur $e_4 = (0,0,1,0)$, ni aucun de ses multiples λe_4, $\lambda \in \mathbf{R}^*$, n'appartiennent à F, puisqu'il ne satisfont pas l'équation (1). Ainsi, $F \cap G = \{0\}$ si $G = Vect(e_4)$. Comme de plus $\dim(F) + \dim(G) = 3 + 1 = 4 = \dim(\mathbf{R}^4)$, on conclut que $G = Vect(e_4)$ est un supplémentaire de F.

Exercice 2 On note $\mathbf{R}_3[X]$ l'espace vectoriel sur $\mathbf{R}$ des polynômes de degré inférieur ou égal à 3.

1. (a) les polynômes de la famille $\mathcal{B} = (1, X-1, (X-1)^2, (X-1)^3)$ sont de degré respectifs $0,1,2,3$. Par l'exercice 16.2 de la feuille 6, ils forment une base de $\mathbf{R}_3[X]$.

   (b) Par la formule de Taylor-Young,
$$p(x) = p(1) + p'(1)(x-1) + \frac{p''(1)}{2}(x-1)^2 + \frac{p^{(3)}(1)}{6}(x-1)^3 + o((x-1)^3)$$

   (c) Puisque $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbf{R}_3[X]$, il existe des coefficients $(a_0, a_1, a_2, a_3) \in \mathbf{R}^4$ tels que
$$P = a_0 + a_1(X-1) + a_2(X-1)^2 + a_3(X-1)^3$$
qu'il nous faut déterminer. La fonction $p : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ associé au polynôme P est définie par
$$p(x) = a_0 + a_1(x-1) + a_2(x-1)^2 + a_3(x-1)^3$$
pour tout $x \in \mathbf{R}$. Par unicité d'un développement limité, on déduit de la question précédente que
$$a_0 = p(1), a_1 = p'(1), a_2 = p''(1)/2 \text{ et } a_3 = p^{(3)}(1)/6$$
et que le terme de reste $o((x-1)^3)$ est en fait nul.

2. (a) Commençons par remarquer que le polynôme nul $P = 0$ est solution évidente de l'équation $2P(1) + 2P'(1) + P''(1) = 0$. Donc, $0 \in F$. Soit à présent $\lambda \in \mathbf{R}$, $P \in F$ et $Q \in F$. Alors,
$$\begin{aligned} &2(\lambda P + Q)(1) + 2(\lambda P + Q)'(1) + (\lambda P + Q)''(1) = \\ &\qquad \lambda(2P(1) + 2P'(1) + P''(1)) + (2Q(1) + 2Q'(1) + Q''(1)) = 0 \end{aligned}$$
Et donc, F est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}_3[X]$.

   (b) On l'a vu, tout polynôme $P \in \mathbf{R}_3[X]$ se décompose dans la base $\mathcal{B}$ sous la forme
$$P = a_0 + a_1(X-1) + a_2(X-1)^2 + a_3(X-1)^3,$$
où
$$a_0 = P(1), a_1 = P'(1), a_2 = P''(1)/2 \text{ et } a_3 = P^{(3)}(1)/6$$
Ainsi,
$$2P(1) + 2P'(1) + P''(1) = 2a_0 + 2a_1 + 2a_2$$
et donc $P \in F$ si et seulement si ses coefficients (a_0, a_1, a_2, a_3) dans la base $\mathcal{B}$ sont solution de l'équation
$$2a_0 + 2a_1 + 2a_2 = 0$$
En posant $a_1 = \lambda_1 \in \mathbf{R}$, $a_2 = \lambda_2 \in \mathbf{R}$ et $a_3 = \lambda_3 \in \mathbf{R}$, cette équation a pour solution
$$(a_0, a_1, a_2, a_3) = (-\lambda_1 - \lambda_2, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \lambda_1(-1,1,0,0) + \lambda_2(-1,0,1,0) + \lambda_3(0,0,0,1)$$
Et donc $P \in F$ si et seulement si
$$P = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3,$$
où $P_1 = -1 + (X-1)$, $P_2 = -1 + (X-1)^2$ et $P_3 = (X-1)^3$. Autrement dit, $F = Vect(P_1, P_2, P_3)$. Les polynômes P_1, P_2, P_3 étant de degré respectif $1,2,3$, ils forment une famille libre et donc $\dim F = 3$.
Voici une seconde preuve, plus concise mais ne reposant pas sur le programme de révision : soit $\varphi : \mathbf{R}_3[X] \to \mathbf{R}$ l'application définie par $\varphi(P) = 2P(1) + 2P'(1) + P''(1)$. On vérifie facilement que φ est linéaire. Par définition, $Im(\varphi) \subset \mathbf{R}$. Observons que pour $P = 1$, $\varphi(P) = 2$, de sorte que $2 \in Im(\varphi)$. Par linéarité, on déduit l'inclusion réciproque $\mathbf{R} = Vect(2) \subset Im(\varphi)$ et donc $Im(\varphi) = \mathbf{R}$. Par le théorème du rang enfin, comme $F = Ker\varphi$, $\dim(F) = \dim(\mathbf{R}_3[X]) - \dim(Im(\varphi)) = 4 - 1 = 3$.

Exercice 3 L'équation homogène s'écrit $f'' - 4f = 0$, a pour équation caractéristique $r^2 - 4 = 0$ dont les racines sont $r = \pm 2$. Ainsi les solutions de l'équation homogène sont les fonctions définies pour $t \in \mathbf{R}$ par

$$f_h(t) = \lambda e^{2t} + \mu e^{-2t},$$

où $(\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2$. Cherchons une solution particulière de la forme

$$f_p(t) = -1 + A\cos(2t),$$

où $A \in \mathbf{R}$. Alors,

$$f_p'' - 4f_p = -4A\cos(2t) - 4(-1 + A\cos(2t)) = 4 - 8A\cos(2t)$$

Le choix $A = 1$ convient et les solutions de l'équation différentielle sont définies pour $t \in \mathbf{R}$ par

$$f(t) = f_h(t) + f_p(t) = \lambda e^{2t} + \mu e^{-2t} - 1 + \cos(2t)$$

où $(\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2$. Pour que de plus $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$, il faut et il suffit que

$$\begin{aligned} \lambda + \mu &= 0 \\ 2\lambda - 2\mu &= 1 \end{aligned}$$

qui a pour solution $\lambda = 1/4$ et $\mu = -1/4$ de sorte que l'unique solution satisfaisant les conditions initiales vérifie

$$f(t) = \frac{1}{4}(e^{2t} - e^{-2t}) - 1 + \cos(2t) = \frac{1}{2}\sinh(2t) - 1 + \cos(2t)$$

pour $t \in \mathbf{R}$.

Exercice 4 L'équation homogène s'écrit $f' + 2\tan(x)f = 0$. Remarquons que

$$a(x) = -2\tan(x) = -2\frac{\sin(x)}{\cos(x)} = 2\frac{u'(x)}{u(x)},$$

où on a posé $u(x) = \cos(x)$ pour $x \in]-\pi/2, \pi/2[$. Donc, les solutions du problème homogène sont les fonctions définies pour $x \in]-\pi/2, \pi/2[$ par

$$f_h(x) = \lambda \exp(2\ln u(x)) = \lambda u^2(x) = \lambda(\cos x)^2,$$

où $\lambda \in \mathbf{R}$. Cherchons à présent une solution particulière de la forme

$$f_p = \lambda v,$$

où $\lambda :]-\pi/2, \pi/2[\to \mathbf{R}$ est une fonction dérivable et $v(x) = \cos^2(x)$. Alors,

$$f_p'(x) = \lambda'(x)v(x) + \lambda(x)v'(x)$$

En se rappelant que v est une des solutions de l'équation homogène, on déduit que

$$f_p' + 2\tan(x)f_p = \lambda' v + \lambda v' + 2\tan(x)\lambda v = \lambda' v + \lambda\left(v' + 2\tan(x)v\right) = \lambda' v = \lambda'\cos^2(x)$$

Donc f_p est solution particulière si

$$\lambda'\cos^2(x) = \exp(\tan(x)).$$

Soit encore, en remarquant que $\cos^2(x) \neq 0$ pour $x \in]-\pi/2, \pi/2[$,

$$\lambda' = \frac{1}{\cos^2(x)}\exp(\tan(x)) = w' e^w,$$

où $w(x) = \tan x$. Donc,

$$\lambda(x) = \exp(w(x)) = \exp(\tan(x))$$

convient et

$$f_p(x) = \lambda(x)v(x) = \exp(\tan(x))\cos^2(x)$$

est une solution particulière. Ainsi, toute solution de l'équation différentielle s'écrit

$$f(x) = \lambda\cos^2(x) + \exp(\tan(x))\cos^2(x),$$

où $\lambda \in \mathbf{R}$.