Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre d'automne 2014-2015

Maths III PMI - Algèbre

Correction de l'examen final d'Analyse III de 2014

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = e^{-x}(1+x-y)\sin(y)$.

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$:

   La fonction f est le produit des fonctions $f_1 : (x,y) \longmapsto e^{-x}$, $f_2 : (x,y) \longmapsto 1+x-y$ polynômiale donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ et $f_3 : (x,y) \longmapsto \sin(y)$. Puisque f_1 est la composée de la fonction réelle exponentielle de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ avec la fonction polynômiale $(x,y) \longmapsto -x$, elle est aussi de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$ et il en est de même de la fonction f_3. Par suite, f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$, donc en particulier $\mathcal{C}^2$.

2. Calculer le gradient de f et la matrice Hessienne de f en tout point (x,y) :

   Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^{-x}(-x+y)\sin(y) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = e^{-x}(-\sin(y) + (1+x-y)\cos(y))$$

   donc le gradient de f au point (x,y) est $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} e^{-x}(-x+y)\sin(y) \\ e^{-x}(-\sin(y)+(1+x-y)\cos(y)) \end{pmatrix}$. De plus,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = e^{-x}(-1+x-y)\sin(y), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = e^{-x}(\sin(y) + (-x+y)\cos(y))$$
$$\text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -e^{-x}(2\cos(y) + (1+x-y)\sin(y).$$

   La matrice Hessienne de f au point (x,y) est donnée par

$$\mathrm{Hess}_f(x,y) = \begin{pmatrix} e^{-x}(-1+x-y)\sin(y) & e^{-x}(\sin(y)+(-x+y)\cos(y)) \\ e^{-x}(\sin(y)+(-x+y)\cos(y)) & -e^{-x}(2\cos(y)+(1+x-y)\sin(y)) \end{pmatrix}.$$

3. Calculer le développement de Taylor-Young de f à l'ordre deux au point $(0,0)$:

   Puisque f est de classe $\mathcal{C}^2$, elle admet un développement de Taylor-Young à l'ordre deux au point $(0,0)$, donné par

$$\begin{aligned} f(h,k) &= f(0,0) + \mathrm{d}f(0,0)(h,k) + \frac{1}{2!}\mathrm{d}^2 f(0,0)((h,k),(h,k)) + o(\|(h,k)\|^2) \\ &= 0 + h\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) + k\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) + \frac{1}{2}\left(h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) + k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) + 2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)\right) + o(\|(h,k)\|^2) \\ &= k - k^2 + o(\|(h,k)\|^2) \quad \text{lorsque } (h,k) \to (0,0) \end{aligned}$$

4. Trouver l'unique point critique de f situé dans l'ouvert $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 > x > 0, \pi > y > 0\}$:

   Soit $(x,y) \in \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 > x > 0, \pi > y > 0\}$. (x,y) est un point critique de f si et seulement si $\mathrm{d}f(x,y)$ est l'application nulle de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, ce qui équivaut au système suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} e^{-x}(-x+y)\sin(y) = 0 \\ e^{-x}(-\sin(y)+(1+x-y)\cos(y)) = 0 \end{array} \right.$$
$$\iff \left\{ \begin{array}{l} x = y \text{ puisque } e^{-x} > 0 \text{ et } \sin(y) > 0 \text{ car } 0 < y < \pi \\ \cos(y) = \sin(y) \end{array} \right.$$
$$\iff (x,y) = \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) \text{ puisque } 0 < x < 1$$

   ce qui démontre que f admet un unique point critique dans l'ouvert donné, qui est $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$.

Comme f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 > x > 0, \pi > y > 0\}$, on peut appliquer le critère de cours sur les extrema concernant la Hessienne :

$$\text{Hess}_f\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) = \frac{e^{-\frac{\pi}{4}}}{2}\begin{pmatrix} -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -3\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

de déterminant $e^{-\dfrac{\pi}{2}} > 0$ et de trace $-2e^{-\frac{\pi}{4}}\sqrt{2} < 0$, ce qui démontre que f admet un maximum local au point critique.

5. Pourquoi peut-on affirmer que f (restreinte à A) atteint son maximum et son minimum sur $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \pi\}$?

   L'ensemble $A = [0;1] \times [0;\pi]$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$ comme produit cartésien des deux segments (fermés) de $\mathbb{R}$. De plus, il est clairement borné puisque pour tout $(x,y) \in A$, $\|(x,y)\|_\infty = \max(|x|,|y|) \leq \pi$. Comme $\mathbb{R}^2$ est de dimension finie, c'est un compact de $\mathbb{R}^2$. Par suite, f est continue sur le compact A, à valeurs réelles, donc elle est bornée sur A et atteint ses bornes.

6. Sans cherche à les calculer, expliquer pourquoi les points où f atteint son minimum sur A sont situés sur la frontière de A (c'est-à-dire sur $A \backslash A^\circ$) :

   On a vu que f admet un minimum (global) sur A, qui est en particulier un minimum local. Si celui-ci est dans l'intérieur de A, qui correspond à l'ouvert $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 > x > 0, \pi > y > 0\}$, il est forcément en un point critique, donc en $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$. Or $f\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}} > 0$ d'où $f(0,0) = 0 < f\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$, ce montre que le point critique ne peut pas être le point de minimum (on aurait aussi pu conclure grâce au critère de cours puisque l'on sait que f admet un maximum local strict en ce point, il ne peut donc pas être point de minimum). Ainsi, les points où f atteint son minimum sont forcément sur la frontière de A.

Exercice 2. On s'intéresse à la surface S dans $\mathbb{R}^3$ définie par l'équation $x^2(y-3)^2+y^2+y+z^2-1=0$, autrement dit, $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid h(x,y,z) = 0\}$ où $h : (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \longmapsto x^2(y-3)^2 + y^2 + y + z^2 - 1$.

1. Montrer que tout point $(x,y,z) \in S$ vérifie $|y| \leq 2$:

   Soit $(x,y,z) \in S$, alors $x^2(y-3)^2 + y^2 + y + z^2 - 1 = 0$. Par positivité de $x^2(y-3)^2$ et z^2, on en déduit que $0 = x^2(y-3)^2 + y^2 + y + z^2 - 1 \geq y^2 + y - 1$. Or la fonction polynômiale réelle $\varphi : t \longmapsto t^2 + t - 1$ a pour discriminant $\Delta = 5$, et deux racines réelles notées $t_1 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ et $t_2 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Elle est donc négative sur $[t_1;t_2]$ et positive stricte sur $]-\infty;t_1[$ et $]t_2;+\infty[$. Par conséquent, y appartient à $[t_1;t_2]$ ce qui implique $|y| \leq \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

   En déduire que S est bornée :

   De même, on a $y + z^2 - 1 \leq 0$ ce qui donne $z^2 \leq 1 - y = |1-y| \leq 1 + |y| \leq 3$ puisque $|y| \leq \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \leq 2$, et $x^2(y-3)^2 + y - 1 \leq 0$ d'où $x^2(y-3)^2 \leq 3$ comme précédemment. Comme $|y| \leq 2$, $(y-3)^2 \leq 1 > 0$, on obtient donc la majoration $x^2 \leq \dfrac{3}{(y-3)^2} \leq 3$. Pour tout $(x,y,z) \in S$, on a donc

   $$\|(x,y,z)\|_2^2 = x^2 + y^2 + z^2 \leq 3 + 2^2 + 3 = 10 \quad \text{d'où} \quad \|(x,y,z)\|_2 \leq \sqrt{10}.$$

   Ainsi, la surface S est bornée.

2. Tout d'abord, la fonction h est polynômiale donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^3$, son gradient existe donc en tout point de S. Pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, le gradient de h au point (x,y,z) est

   $$\nabla h(x,y,z) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial h}{\partial x}(x,y,z) \\ \dfrac{\partial h}{\partial y}(x,y,z) \\ \dfrac{\partial h}{\partial z}(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x(y-3)^2 \\ 2x^2(y-3) + 2y + 1 \\ 2z \end{pmatrix}$$

Soit $(x, y, z) \in S$. Supposons par l'absurde que $\nabla h(x, y, z)$ est le vecteur nul, alors comme $y < 3$, on en déduit que $(x, y, z) = \left(0, -\frac{1}{2}, 0\right)$ ce qui est contradictoire car ce point n'appartient pas à S puisque $h\left(0, -\frac{1}{2}, 0\right) = -\frac{5}{4} \neq 0$.

3. (Question facultative) Déterminer le plan tangent à S au point $(0, 0, 1)$. Pour une surface S' donnée par $S' = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid F(x, y, z) = 0\}$ où $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$, l'équation du plan tangent au point (x_0, y_0, z_0) est donnée par

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + \frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0.$$

Dans notre cas, l'équation du plan tangent à S au point $(0, 0, 1)$ est donc

$$(y - 0) + 2(z - 1) = 0.$$

4. Prouvez que la fonction $f : (x, y, z) \longmapsto y + 2z$ atteint un minimum et un maximum sur S :
La fonction f est polynômiale donc continue sur $\mathbb{R}^3$. La surface S est bornée d'après la question 1. Montrons qu'elle est fermée grâce à la caractérisation séquentielle des fermés. Soit $((x_n, y_n, z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de S qui converge vers $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $h(x_n, y_n, z_n) = 0$ donc $h(x_n, y_n, z_n)$ tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$. D'autre part, par continuité de h, on a aussi $h(x_n, y_n, z_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} h(x, y, z)$. Par unicité de la limite, on en conclut que $h(x, y, z) = 0$, ce qui démontre que $(x, y, z) \in S$. Ainsi, S est une partie fermée de $\mathbb{R}^3$, bornée, puisque $\dim(\mathbb{R}^3) < +\infty$, c'est un compact de $\mathbb{R}^3$. La fonction f est continue sur le compact S, à valeurs réelles, donc elle est bornée sur S et atteint ses bornes.

5. Déterminer les points où f atteint ses bornes sur S :
On cherche les extrema de f restreinte à la surface $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid h(x, y, z) = 0\}$, ce qui revient à chercher les extrema de f sous la contrainte $h(x, y, z) = 0$. On va donc chercher à appliquer le théorème du multiplicateur de Lagrange (extrema liés). Soit $(x, y, z) \in S$. Puisque $\mathbb{R}^3$ est un ouvert, que f et h sont toutes deux de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$, et que $\mathrm{d}h(x, y, z)$ n'est pas l'application nulle (puisque $\nabla h(x, y, z) \neq 0$), si f admet un extremum local en (x, y, z) (sous la contrainte $h(x, y, z) = 0$), alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{d}f(x, y, z) = \lambda \mathrm{d}h(x, y, z)$, d'où

$$\begin{cases} \nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla h(x, y, z) \\ (x, y, z) \in S \end{cases} \iff \begin{cases} 0 = \lambda 2x(y-3)^2 \\ 1 = \lambda(2x^2(y-3) + 2y + 1) \\ 2 = \lambda 2z \quad (\text{donc } \lambda \neq 0) \\ x^2(y-3)^2 + y^2 + y + z^2 - 1 = 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x = 0 \\ y = \dfrac{1-\lambda}{2\lambda} \\ z = \dfrac{1}{\lambda} \\ \dfrac{(1-\lambda)^2}{4\lambda^2} + \dfrac{1-\lambda}{2\lambda} + \dfrac{1}{\lambda}^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

Or

$$\frac{(1-\lambda)^2}{4\lambda^2} + \frac{1-\lambda}{2\lambda} + \frac{1}{\lambda}^2 - 1 = 0 \iff (1-\lambda)^2 + 2\lambda(1-\lambda) + 4 - 4\lambda^2 = 0 \iff \lambda^2 = 1 \iff \lambda \in \{-1; 1\}$$

ce qui entraîne, pour $\lambda = 1$, $(x, y, z) = (0, 0, 1)$ et pour $\lambda = -1$, $(x, y, z) = (0, -1, -1)$.
On sait que f admet forcément un minimum et un maximum sur S. De plus, l'étude ci-dessus montre que ceux-ci sont forcément atteints aux points $(0, 0, 1)$ et $(0, -1, -1)$. Puisque $f(0, 0, 1) = 2 > f(0, -1, -1) = -3$, il découle que la restriction de f à S atteint son maximum en $(0, 0, 1)$ et son minimum en $(0, -1, -1)$.

6. On définit $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ par $g(x, y, z) = \cos(x) - ye^{-z} + z$ et $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ par $F(x, y, z) = (g(x, y, z), h(x, y, z))$.
Calculer la matrice jacobienne de F en tout point $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:
Tout d'abord, puisque g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$ (comme somme de produits et composée de fonctions polynômiales avec des fonctions réelles de classe $\mathcal{C}^\infty$), et h aussi, la fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$, ce

qui justifie l'existence de sa matrice Jacobienne en tout point $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, alors

$$J_F(x,y,z)=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y,z) & \dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y,z) & \dfrac{\partial g}{\partial z}(x,y,z)\\ \dfrac{\partial h}{\partial x}(x,y,z) & \dfrac{\partial h}{\partial y}(x,y,z) & \dfrac{\partial h}{\partial z}(x,y,z)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\sin(x) & -e^{-z} & ye^{-z}+1\\ 2x(y-3)^2 & 2x^2(y-3)+2y+1 & 2z\end{pmatrix}.$$

7. Calculer la matrice Jacobienne de la fonction $(y,z)\longmapsto F(0,y,z)$ au point $(0,-1)$ et montrer qu'elle est inversible.

   Notons $G:(y,z)\longmapsto F(0,y,z)=(G_1(y,z),G_2(y,z))$. La matrice Jacobienne de G au point $(0,-1)$ est donnée par

$$J_G(0,-1)=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial G_1}{\partial y}(0,-1) & \dfrac{\partial G_1}{\partial z}(0,-1)\\ \dfrac{\partial G_2}{\partial y}(0,-1) & \dfrac{\partial G_2}{\partial z}(0,-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial g}{\partial y}(0,0,-1) & \dfrac{\partial g}{\partial z}(0,0,-1)\\ \dfrac{\partial h}{\partial y}(0,0,-1) & \dfrac{\partial h}{\partial z}(0,0,-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-e & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}$$

   de déterminant $2e-1\neq 0$, donc elle est inversible.

8. Démontrer qu'au voisinage du point $(0,0,-1)$, l'équation $F(x,y,z)=(0,0)$ équivaut à $(y,z)=\phi(x)$ pour une certaine fonction ϕ :

   - La fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$.
   - Le point $(0,0,-1)$ est tel que $F(0,0,-1)=(0,0)$.
   - La différentielle au point $(0,-1)$ de l'application partielle $G:(y,z)\in\mathbb{R}^2\longrightarrow F(0,y,z)$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même, car d'après la question 7, sa Jacobienne est inversible.

   D'après le théorème des fonctions implicites, il existe donc un ouvert $U_{(0,0,-1)}$ de $\mathbb{R}^3$ contenant $(0,0,-1)$, un ouvert W_0 de $\mathbb{R}$ contenant 0, et une fonction $\phi:W_0\longrightarrow\mathbb{R}^2$ de classe $\mathcal{C}^1$ tels que

$$((x,y,z)\in U_{(0,0,-1)}\text{ et }F(x,y,z)=(0,0))\iff(x\in W_0\text{ et }(y,z)=\phi(x))$$

   ce qui démontre qu'au voisinage du point $(0,0,-1)$, l'équation $F(x,y,z)=(0,0)$ équivaut à $(y,z)=\phi(x)$.

9. En notant ϕ_1 et ϕ_2 les composantes de ϕ, calculer $\phi_1'(0)$ et $\phi_2'(0)$:

   - *Première méthode :* Pour tout $x\in W_0$, on a

$$F(x,\phi_1(x),\phi_2(x))=(0,0)\iff\left\{\begin{array}{l}\cos(x)-\phi_1(x)e^{-\phi_2(x)}+\phi_2(x)=0\\ x^2(\phi_1(x)-3)^2+(\phi_1(x))^2+\phi_1(x)+\phi_2(x)^2-1=0\end{array}\right.$$

   En dérivant ceci ligne par ligne, on trouve, pour tout $x\in W_0$,

$$\left\{\begin{array}{l}-\sin(x)-\phi_1'(x)e^{-\phi_2(x)}-\phi_1(x)\phi_2'(x)e^{-\phi_2(x)}+\phi_2'(x)=0\\ 2x(\phi_1(x)-3)^2+2x^2\phi_1'(x)(\phi_1(x)-3)+2\phi_1'(x)\phi_1(x)+\phi_1'(x)+2\phi_2'(x)\phi_2(x)=0\end{array}\right.$$

   ce qui donne

$$\begin{pmatrix}-e^{-\phi_2(x)} & -\phi_1(x)e^{-\phi_2(x)}+1\\ 2x^2(\phi_1(x)-3)+2\phi_1(x)+1 & 2\phi_2(x)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\phi_1'(x)\\ \phi_2'(x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sin x\\ -2x(\phi_1(x)-3)^2\end{pmatrix}$$

   Puisque $(0,0,-1)\in U_{(0,0,-1)}$ et vérifie $F(0,0,-1)=0$, on a en particulier $(0,-1)=\phi(0)$ donc $\phi_1(0)=0$ et $\phi_2(0)=-1$. Puisque $0\in W_0$, le système précédent évalué en $x=0$ donne

$$\begin{pmatrix}-e & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\phi_1'(0)\\ \phi_2'(0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\quad\text{d'où}\quad\begin{pmatrix}\phi_1'(0)\\ \phi_2'(0)\end{pmatrix}=\frac{1}{2e-1}\begin{pmatrix}-2 & -1\\ -1 & -e\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}.$$

   - *Deuxième méthode :* on utilise directement la formule du cours. On sait qu'il existe un ouvert $\widetilde{W_0}$ inclus dans W_0 vérifiant, pour tout $x\in\widetilde{W_0}$:

$$\mathrm{d}\phi(x)=-\mathrm{d}_2F(x,\phi(x))^{-1}\circ\mathrm{d}_1F(x,\phi(x))$$

où $\mathrm{d}_1F(a,b)$ désigne la différentielle de l'application $x \longmapsto F(x,b)$ au point a et $\mathrm{d}_2F(a,b)$ la différentielle de l'application $(y,z) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto F(a,y,z)$ au point $b \in \mathbb{R}^2$. Matriciellement, cela donne la formule (en utilisant les matrices Jacobiennes des applications considérées) :

$$\begin{pmatrix} \phi_1'(x) \\ \phi_2'(x) \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \dfrac{\partial g}{\partial y}(x,\phi(x)) & \dfrac{\partial g}{\partial z}(x,\phi(x)) \\ \dfrac{\partial h}{\partial y}(x,\phi(x)) & \dfrac{\partial h}{\partial z}(x,\phi(x)) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,\phi(x)) \\ \dfrac{\partial h}{\partial x}(x,\phi(x)) \end{pmatrix}$$

d'où en $x = 0$

$$\begin{pmatrix} \phi_1'(0) \\ \phi_2'(0) \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \dfrac{\partial g}{\partial y}(0,0,-1) & \dfrac{\partial g}{\partial z}(0,0,-1) \\ \dfrac{\partial h}{\partial y}(0,0,-1) & \dfrac{\partial h}{\partial z}(0,0,-1) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g}{\partial x}(0,0,-1) \\ \dfrac{\partial h}{\partial x}(0,0,-1)) \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -e & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Remarque : la matrice dont on prend l'inverse est la même que celle que l'on a calculé dans la question 7. Si on cherche à appliquer le théorème des fonctions implicites à la première composante de F, à savoir $g : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ au même point $(0,0,-1)$ (qui est tel que $g(0,0,-1) = 0$). Il faudrait cette fois vérifier que la différentielle de l'application $z \in \mathbb{R} \longmapsto g(0,0,z)$ au point -1 est un isomorphisme de $\mathbb{R}$, il suffit alors de vérifier que le terme $\dfrac{\partial g}{\partial z}(0,0,-1) = 1$ est non nul, ce qui est bien le cas. Il existe alors un ouvert $U'_{(0,0,-1)}$ de $\mathbb{R}^3$ contenant $(0,0,-1)$, un ouvert $W'_{(0,0)}$ de $\mathbb{R}^2$ contenant $(0,0)$ et une application $\varphi : W'_{(0,0)} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que

$$((x,y,z) \in U'_{(0,0,-1)} \text{ et } g(x,y,z) = 0) \iff ((x,y) \in W'_{(0,0)} \text{ et } z = \varphi(x,y)).$$

On pourrait alors nous demander de manière similaire à ce que l'on a fait ci-dessus de déterminer $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}(0,0)$ et $\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}(0,0)$. On utilise alors le fait que $\varphi(0,0) = -1$ (puisque $g(0,0,-1) = 0$ et $(0,0,-1) \in U'_{(0,0,-1)}$) et l'identité

$$\forall (x,y) \in W'_{(0,0)}, \quad g(x,y,\varphi(x,y)) = 0 \text{ i.e. } \cos(x) - ye^{-\varphi(x,y)} + \varphi(x,y) = 0$$

et on dérive par rapport à x (resp. par rapport à y). On peut aussi utiliser directement la formule de cours au point $(0,0,-1)$ qui s'écrit matriciellement sous la forme :

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x}(0,0) & \dfrac{\partial \varphi}{\partial y}(0,0) \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \dfrac{\partial g}{\partial z}(0,0,-1) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g}{\partial x}(0,0,-1) & \dfrac{\partial g}{\partial y}(0,0,-1) \end{pmatrix}.$$

10. Bonus : Montrer qu'il n'est pas possible de résoudre l'équation $F(x,y,z) = (0,0)$ en $(x,y) = \psi(z)$ (avec ψ différentiable) au voisinage de $(0,0,-1)$:

Supposons qu'au voisinage de $(0,0,-1)$, l'équation $F(x,y,z) = (0,0)$ équivaut à $(x,y) = \psi(z) = (\psi_1(z), \psi_2(z))$ avec ψ différentiable. Alors on a pour z assez proche de -1,

$$\begin{cases} \cos(\psi_1(z)) - \psi_2(z)e^{-z} + z = 0 \\ \psi_1(z)^2(\psi_2(z)-3)^2 + \psi_2(z)^2 + \psi_2(z) + z^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

d'où en dérivant chaque ligne par rapport à z :

$$\begin{cases} -\psi_1'(z)\sin(\psi_1(z)) - \psi_2'(z)e^{-z} + \psi_2(z)e^{-z} + 1 = 0 \\ 2\psi_1'(z)\psi_1(z)(\psi_2(z)-3)^2 + 2\psi_1(z)^2\psi_2'(z)(\psi_2(z)-3) + 2\psi_2'(z)\psi_2(z) + \psi_2'(z) + 2z = 0 \end{cases}$$

d'où en évaluant ceci en $z = -1$ (puisque $\psi(-1) = (0,0) = (\psi_1(-1), \psi_2(-1))$)

$$\begin{cases} -\psi_2'(-1)e + 1 = 0 \\ \psi_2'(-1) - 2 = 0 \end{cases}$$

ce qui est absurde.