Exercice 1

1) Ressemble tant à tant de choses faites en TD que je ne le tape pas. Attention quand même à invoquer un théorème précis quand il s'agira de montrer que la formule donne quelque chose de non nul sur une fonction non nulle !

2) a) Soit $m \geq 0$ et φ réel, on développe :

$$\sin[(m+1)\varphi + \varphi] = \sin[(m+1)\varphi]\cos\varphi + \cos[(m+1)\varphi]\sin\varphi$$
$$\sin[(m+1)\varphi - \varphi] = \sin[(m+1)\varphi]\cos\varphi - \cos[(m+1)\varphi]\sin\varphi.$$

En ajoutant ces deux identités, on obtient le résultat demandé. (On peut aussi faire plus laborieusement mais efficacement avec des exponentielles complexes par exemple).

b) C'est crétin : on peut (et doit) prendre $U_0 = 1$ et $U_1 = 2X$.

c) On va noter (H_n) l'hypothèse d'existence d'un polynôme U_n de degré n pour lequel l'identité proposée est vraie.
La récurrence a été initialisée par la production de U_0 et U_1. Soit donc un $n \geq 2$ et supposons l'hypothèse (H_k) vérifiée pour tous les k strictement inférieurs à n ; en pratique le supposer pour $k = n-2$ et $k = n-1$ nous suffira.
Soit un $\varphi \in \mathbf{R} \setminus \pi\mathbf{Z}$. On écrit l'identité du a) pour $m = n-2$ et on la divise par $\sin\varphi$, on obtient :

$$\frac{\sin(n\varphi)}{\sin\varphi} = 2\cos\varphi\frac{\sin[(n-1)\varphi]}{\sin\varphi} - \frac{\sin(n-2)\varphi}{\sin\varphi} = 2\cos\varphi\, U_{n-1}(\cos\varphi) - U_{n-2}(\cos\varphi).$$

On voit alors que si on pose $U_n = 2XU_{n-1} - U_{n-2}$, le polynôme U_n vérifie l'identité souhaitée. De plus il est de degré n puisque XU_{n-1} est de degré n tandis que U_{n-2} est de degré strictement inférieur.

3) On effectue le calcul de $\langle U_i \mid U_j\rangle$ pour i et j entiers positifs en suivant l'indication.
Préparons le changement de variables : $\varphi = \operatorname{Arccos} t$, donc φ varie de π à 0 quand t varie de -1 à 1. On a par ailleurs $t = \cos\varphi$, donc $dt = -\sin\varphi\, d\varphi$. Exécutons :

$$\begin{aligned}\langle U_i \mid U_j\rangle = \int_{t=-1}^{t=1} U_i(t)U_j(t)\sqrt{1-t^2}\,dt &= -\int_{\varphi=\pi}^{\varphi=0} U_i(\cos\varphi)U_j(\cos\varphi)\sqrt{1-\cos^2\varphi}\sin\varphi\, d\varphi \\ &= \int_0^\pi \frac{\sin((i+1)\varphi)}{\sin\varphi}\frac{\sin((j+1)\varphi)}{\sin\varphi}\sin^2\varphi\, d\varphi \\ &= \int_0^\pi \sin((i+1)\varphi)\sin((j+1)\varphi)\, d\varphi.\end{aligned}$$

a) Si on suppose $i \neq j$ cette intégrale est nulle, donc le produit scalaire $\langle U_i \mid U_j\rangle$ est nul.

b) Pour $i = j$ noté n, l'intégrale vaut $\frac{\pi}{2}$, d'où $\|U_n\| = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

Exercice 2

1) a) Fixons un x dans $\mathbf{R}^+$. Quand n tend vers l'infini, chacun des logarithmes qui apparaît dans la définition de $u_n(x)$ tend vers $\ln 1 = 0$ donc $u_n(x)$ tend lui aussi vers zéro.

b) Fixons un n supérieur ou égal à 1. Quand x tend vers $+\infty$ le réel $u_n(x)$ tend vers l'infini. La fonction u_n n'est donc pas bornée : en d'autres termes, $\|u_n\|_{\infty,\mathbf{R}^+} = +\infty$ et ne tend pas du tout vers zéro quand n tend vers l'infini. La convergence de u_n vers la fonction nulle n'est donc pas du tout uniforme.

2) Fixons un x dans $\mathbf{R}^+$. Quand $n \to +\infty$:

$$u_n(x) = x\left(\frac{1}{n} + O(\frac{1}{n^2})\right) - \left(\frac{x}{n} + O(\frac{1}{n^2}\right) = O(\frac{1}{n^2}).$$

La série de terme général $u_n(x)$ est donc absolument convergente et en particulier convergente. Ceci montre la convergence simple de la série Σu_n.

3) a) On fixe $n \geq 1$ et on calcule, pour tout $x \geq 0$:

$$u_n'(x)=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{x+n}\qquad\text{puis}\qquad u_n''(x)=\frac{1}{(x+n)^2}.$$

La fonction u_n'' est clairement décroissante sur $\mathbf{R}^+$ et à valeurs positives, d'où $\|u_n''\|_{\infty,\mathbf{R}^+}=u_n''(0)=1/n^2$. Ceci est le terme général d'une série divergente, d'où la convergence normale de $\Sigma u_n''$.

b) Notons provisoirement W la somme de la série $\Sigma u_n''$. La série $\Sigma u_n''$ converge normalement sur $\mathbf{R}^+$; par ailleurs pour chaque $n\geq 1$:

$$u_n'(0)=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n}$$

donc, quand n tend vers $+\infty$:

$$u_n'(0)=\left(\frac{1}{n}+O(\frac{1}{n^2})\right)-\frac{1}{n}=O(\frac{1}{n^2})$$

est le terme général d'une série convergente.

La série $\Sigma u_n'$ de fonctions $\mathcal{C}^1$ converge donc en 0 alors que la série $\Sigma u_n''$ converge uniformément sur $\mathbf{R}^+$ vers W. Le théorème de dérivation des séries assure que $\Sigma u_n'$ converge uniformément sur tout segment de $\mathbf{R}^+$ et que sa somme V est de classe $\mathcal{C}^1$, avec $V'=W$.

On recommence avec Σu_n, série de fonctions $\mathcal{C}^1$ dont la convergence simple est déjà connue ; on sait désormais que la série des dérivées converge uniformément sur tout segment de $\mathbf{R}^+$. On en déduit que la somme U est dérivable, avec pour dérivée $U'=V$.

En mettant tout ça bout à bout, U se révèle deux fois dérivable avec une dérivée seconde qui est $V'=W$ donc qui est continue.

4) a) On peut faire des tableaux de variation pour les fonctions auxiliaires $y\mapsto\ln(1+y)-y(\ln 2)$ et $y\mapsto y-\ln(1+y)$ et obtenir à partir de ceux-ci les inégalités demandées (je m'attends à ce genre de solutions et les arroserai de points bien mérités). Il est plus agréable de remarquer que $y\mapsto\ln(1+y)$ est une fonction concave (*i.e.* l'opposé d'une fonction convexe) donc que son graphe est d'une part au dessous sa tangente en $(0,0)$ et d'autre part au dessus de la sécante qui joint les points $(0,0)$ et $(1,\ln 2)$. Ces deux informations géométriques sont les inégalités demandées pour peu qu'on écrive les équations respectives de cette tangente et de cette sécante.

b) Soit $n\geq 1$. Si on note $y=1/n$ le réel y est élément de $[0,1]$ et on peut utiliser le a) qu'on a ici intérêt à regrouper en :

$$[(\ln 2)-1]y\leq\ln(1+y)-y\leq 0.$$

En remarquant que y est positif et que $-1/2\leq(\ln 2)-1$ on a gagné.

c) On a calculé plus haut la dérivée u_n'' qui est de façon flagrante à valeurs strictement positives. La fonction u_n' est donc strictement croissante. Sa valeur en 0 est $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n}$, réel négatif vu le b) tandis que sa limite en $+\infty$ est $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$, réel positif. Au vu de ce tableau de variations,

$$\|u_n'\|_{\infty,\mathbf{R}^+}=\mathrm{Max}(\left|\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n}\right|,\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)).$$

Maintenant, au vu du b), le premier de ces deux réels est inférieur ou égal à $1/2n$ tandis qu'au vu du a) le deuxième est supérieur ou égal à $(\ln 2)/n$. C'est donc le second qui l'emporte et en conclusion :

$$\|u_n'\|_{\infty,\mathbf{R}^+}=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

d) Il découle du résultat du c) que $\|u_n'\|_{\infty,\mathbf{R}^+}\sim 1/n$ quand n tend vers l'infini, où l'équivalent $1/n$ est le terme général d'une série divergente à termes positifs. La série $\Sigma\|u_n'\|_{\infty,\mathbf{R}^+}$ est donc elle-même divergente : il n'y a pas convergence normale.

e) Pour tout k dans la sommation, un petit dessin qui vaut mieux qu'un long discours (et qui exploite la positivité et la décroissance de $t \mapsto 1/t$) montre que $\int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{k}$. En sommant tout ça de $k = n$ à $k = 2n-1$ on a minoré la sommation proposée par $\int_n^{2n} \frac{dt}{t}$. Or cette dernière intégrale vaut $\ln(2n) - \ln n = \ln 2$. Mission accomplie.

f) La limite en l'infini de la fonction de l'énoncé est la somme des limites de chacune des fonctions sommées, c'est donc :

$$l_n = \sum_{k=n}^{2n-1} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right).$$

En appelant le a) à la rescousse, on minore l_n par le produit de $\ln 2$ et de la sommation du e), qu'on minore à son tour par $\ln 2$. Le tour est dans le sac.

g) Si la série de terme général u'_n convergeait uniformément, elle vérifierait le critère de Cauchy uniforme : pour tout ϵ, il existerait donc un N tel que pour tout $p \leq q$ tous deux plus grands que N on ait l'inégalité :

$$\|\sum_{k=p}^{q} u'_k\|_{\infty,\mathbf{R}^+} \leq \epsilon.$$

Appliquons ceci à $\epsilon = \frac{(\ln 2)^2}{2}$, ce qui fournit un N puis à $p = N$ et $q = 2N - 1$: on en déduit que pour tout x de $\mathbf{R}^+$:

$$|\sum_{k=N}^{2N-1} u'_k(x)| \leq \frac{(\ln 2)^2}{2}$$

puis par passage à la limite que $l_N \leq \frac{(\ln 2)^2}{2}$. Ceci contredit le f). La convergence uniforme est donc à exclure.

Exercice 3

1) Difficile à taper, mais facile à tracer : trois flèches partant d'une même origine et à 120 degrés les unes des autres répondent à la question.

2) On développe :

$$\|\sum_{i=0}^{p} |\alpha_i| v_i\|^2 = \sum_{\substack{0 \leq i \leq p \\ 0 \leq j \leq p}} |\alpha_i \alpha_j| \langle v_i \mid v_j \rangle.$$

Dans cette sommation, on considère séparément les termes qui correspondent à $i = j$ et ceux qui correspondent à $i \neq j$. Pour les premiers, $|\alpha_i \alpha_i| \langle v_i \mid v_i \rangle = \alpha_i^2 \langle v_i \mid v_i \rangle$; pour les seconds on dispose de l'inégalité évidente $\alpha_i \alpha_j \leq |\alpha_i \alpha_j|$ qu'on peut multiplier par le réel positif $\langle v_i \mid v_j \rangle$ pour obtenir, après changement de signe :

$$|\alpha_i \alpha_j| \langle v_i \mid v_j \rangle \leq \alpha_i \alpha_j \langle v_i \mid v_j \rangle.$$

On somme tout ça, et on obtient :

$$\|\sum_{i=0}^{p} |\alpha_i| v_i\|^2 = \sum_{\substack{0 \leq i \leq p \\ 0 \leq j \leq p}} |\alpha_i \alpha_j| \langle v_i \mid v_j \rangle \leq \sum_{\substack{0 \leq i \leq p \\ 0 \leq j \leq p}} \alpha_i \alpha_j \langle v_i \mid v_j \rangle = \|\sum_{i=0}^{p} \alpha_i v_i\|^2.$$

3) a) On examine la somme :

$$\sum_{i \in A} \lambda_i v_i + \sum_{j \in B} \lambda_j v_j.$$

Comme A et B sont d'intersection vide et ont pour réunion l'ensemble $\{1,\dots,p\}$ des indices indexant les λ_k, la somme de ces deux sommes est en fait la somme des $\lambda_k v_k$ sur tous les indices k variant dans $\{1,\dots,p\}$. Or cette somme est nulle par hypothèse. Ceci prouve que $-\sum_{j\in B}\lambda_j v_j = \sum_{i\in A}\lambda_i v_i = u$.

b) On calcule alors :

$$\|u\|^2 = \langle \sum_{i\in A}\lambda_i v_i \mid -\sum_{j\in B}\lambda_j v_j\rangle = -\sum_{\substack{i\in A\\ j\in B}}\lambda_i\lambda_j\langle v_i \mid v_j\rangle.$$

Dans chaque terme de cette dernière sommation, le scalaire λ_i est positif (définition de A), le scalaire λ_j négatif (définition de B) et le produit scalaire $\langle v_i \mid v_j\rangle$ est négatif (car le système est obtusangle et A et B sont disjoints donc $i \neq j$). Chacun des termes de la somme est donc positif, et la somme est positive. Puisqu'elle est précédée d'un signe moins, on en déduit que $\|u\|^2 \leq 0$. Un carré de réel qui est négatif est nul, donc $\|u\|^2 = 0$ et finalement $u = 0$.

c) On développe :

$$\langle v_0 \mid u\rangle = \langle v_0 \mid \sum_{i\in A}\lambda_i v_i\rangle = \sum_{i\in A}\lambda_i\langle v_0 \mid v_i\rangle.$$

Dans la sommation qui précède, chaque terme est produit de λ_i qui est positif et de $\langle v_0 \mid v_i\rangle$ qui est négatif, donc est négatif.
On s'aperçoit par ailleurs que $\langle v_0 \mid u\rangle = \langle v_0 \mid 0\rangle = 0$. Le calcul qui précède a donc mené à écrire 0 comme une somme de réels tous négatifs. Ceci entraîne que chacun de ces réels est nul donc que pour chaque $i \in A$, $\lambda_i\langle v_0 \mid v_i\rangle = 0$. Comme par hypothèse chaque λ_i et chaque $\langle v_0 \mid v_i\rangle$ n'est pas nul, c'est que A est vide et que tous les λ_k sont négatifs ou nuls, autrement dit que $B = \{1,\dots,p\}$.
On refait alors la même chose en développant

$$\langle v_0 \mid -u\rangle = \langle v_0 \mid \sum_{j\in B}\lambda_j v_j\rangle = \langle v_0 \mid \sum_{j=1}^{p}\lambda_j v_j\rangle = \sum_{j=1}^{n}\lambda_j\langle v_0 \mid v_j\rangle.$$

Comme plus haut, ça fait zéro. Cette fois chaque terme de la somme est positif, donc on a affaire à une somme nulle de termes tous positifs : c'est donc que chaque terme est nul. Dans chacun de ces termes le produit scalaire $\langle v_0 \mid v_j\rangle$ est par hypothèse non nul, c'est donc que $\lambda_j = 0$.
On a enfin prouvé la nullité de tous les λ_k et donc la liberté de la famille $(v_1,\dots,v_p)$.

4) a) Il découle du 3) que la famille $(v_1,\dots,v_n)$ est libre. Une famille libre de n vecteurs dans E qui est de dimension n constitue une base de E.

b) On suit religieusement la suggestion et on obtient l'inégalité :

$$\|v_0 + \sum_{i=1}^{n}|\mu_i|v_i\|^2 \leq \| - v_0 + \sum_{i=1}^{n}\mu_i v_i\|^2.$$

Dans cette inégalité, le vecteur qui apparaît à droite est nul par définition des coordonnées de v_0 dans la base $(v_1,\dots,v_n)$. Le carré qui apparaît à gauche est donc négatif, donc nul ; le vecteur $v_0 + \sum_{i=1}^{n}|\mu_i|v_i$ est donc lui-même nul. D'où la relation :

$$v_0 = \sum_{i=1}^{n}(-|\mu_i|)v_i.$$

Par unicité des coordonnées, on en déduit pour chaque indice i l'égalité : $\mu_i = -|\mu_i|$ ce qui prouve que chaque μ_i est négatif ou nul.