

①

Corrigé DS n°2 - partie analyse

Exercice 1:

1) On a $\ln(1+x) \sim x$ donc

$$u_n \sim \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \sim \frac{1}{n},$$

terme général positif d'une série divergente par le critère de Riemann. Donc $\sum u_n$ diverge.

2) Soit $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| &= \frac{(n+1)! (3n)!}{(3n+3)! n!} \\ &= \frac{n+1}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)} \sim \frac{n}{3^3 n^3} \xrightarrow{+\infty} 0. \end{aligned}$$

Par la règle de d'Alembert, $\sum u_n$ converge.

3) Soit $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| &= \left| \frac{((-1)^{n+1} + n+1)(2^n + 3)}{(2^{n+1} + 3)((-1)^n + n)} \right| \\ &\sim \frac{n 2^n}{2^{n+1} n} \sim \frac{1}{2} \xrightarrow{+\infty} \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Par le critère de d'Alembert, $\sum u_n$ converge.

4) Pour n dans $\mathbb{N}$, on a

$$u_n = \exp\left(n^2 \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)\right),$$

(2)

On a
$$n^2 \ln \left(\frac{n}{n+1} \right) = n^2 \ln \left(1 - \frac{1}{n+1} \right)$$

$$\underset{n \rightarrow \infty}{\sim} - \frac{n^2}{n+1} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} -n$$

Donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N$,

$$n^2 \ln \left(\frac{n}{n+1} \right) \leq -\frac{1}{2}n,$$

donc
$$0 \leq u_n \leq e^{-\frac{1}{2}n}.$$

Or
$$e^{-1/2n} = \left(\frac{1}{\sqrt{e}} \right)^n$$
 est le terme général

d'une série géométrique convergente car $\sqrt{e} > 1$.
 Ainsi: $\sum u_n$ converge.

5) Appliquons le critère spécial des séries alternées.

On a
$$u_n = (-1)^n v_n$$
 avec
$$v_n = \frac{\sqrt{n!}}{n+1}.$$

On a
$$v_{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$
. De plus, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$v_n > 0$$
 et

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\sqrt{n+1!} \cdot n}{\sqrt{n!} \cdot (n+1)} = \sqrt{\frac{n}{n+1}} < 1.$$

Donc $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante.

Ainsi: $\sum u_n$ converge.

Exercice 2:

On a
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$
 donc

$$\cos \left(\frac{1}{n} \right) - a - \frac{b}{n} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} 1 - a - \frac{b}{n} - \frac{1}{2n^2} + o \left(\frac{1}{n^2} \right)$$

Par le critère de Riemann, les séries

$$\sum \frac{1}{2n^2} \quad \text{et} \quad \sum_{n \rightarrow \infty} o \left(\frac{1}{n^2} \right) \quad \text{sont convergentes.}$$

(3)

La série de terme général

$$u_n = \cos\left(\frac{1}{n}\right) - a - \frac{b}{n}$$

est donc de même nature que

$$\sum \left(1 - a - \frac{b}{n}\right)$$

On a $1 - a - \frac{b}{n} \xrightarrow{+\infty} 1 - a$

Donc si $a \neq 1$, $\sum u_n$ diverge.

On suppose dans la suite que $a = 1$.

Par le critère de Riemann, la série

$$\sum \left(-\frac{b}{n}\right)$$

converge si et seulement si $b = 0$.

Donc $\sum u_n$ converge si et seulement si $a = 1$ et $b = 0$.

Exercice 3:

1) La fonction $t \mapsto \frac{\ln(t)}{t^2+1}$ est continue sur $[1, +\infty[$. De plus,

$$\frac{\ln(t)}{t^2+1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln(t)}{t^2} \quad \text{qui}$$

est une fonction positive sur $[1, +\infty[$ et intégrable sur $[1, +\infty[$ par le critère de Bertrand. Donc

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2+1} dt \text{ est convergente.}$$

(4)

2) La fonction $f: t \mapsto \frac{\ln t}{t^2}$ est positive sur $[1, +\infty[$ et dérivable, avec

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\ln t}{t^2} &= \frac{\frac{1}{t} t^2 - \ln t \cdot 2t}{t^4} \\ &= \frac{t(1 - 2 \ln t)}{t^4}, \end{aligned}$$

qui est négative pour $t \geq e^{1/2}$. Donc f est décroissante sur $[e^{1/2}; +\infty[$ et, par comparaison séries-intégrale,

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{\ln n}{n^2} \text{ et } \int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2} dt$$

sont de même nature. Par le critère de Bertrand, $\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2} dt$ converge donc

$\sum \frac{\ln n}{n^2}$ est convergente.

3) On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{n^2} = 0$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{\ln n}{n^2}$ est une série convergente à termes positifs. On peut donc $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln k}{k^2} \sim \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln k}{k^2}$.

4) Déterminons un équivalent de T_n . Pour $n \geq 3$, $n \geq e^{1/2}$ donc $f: t \mapsto \frac{\ln t}{t^2}$ est décroissante sur $[n, +\infty[$. Par encadrement série-intégrale, on a, $\mathbb{R}$

$$(*) \quad \int_n^{+\infty} f(t) dt \geq \sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k) \geq \int_{n+1}^{+\infty} f(t) dt,$$

avec

(5)

$$\int_m^{+\infty} f(t) dt = \int_m^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2} dt$$

$$u = \ln t$$

$$u' = \frac{1}{t}$$

$$u' = \frac{1}{t}$$

$$v = -\frac{1}{t}$$

$$= \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_m^a \frac{\ln t}{t^2} dt$$

$$= \lim_{a \rightarrow +\infty} \left(\left[-\frac{\ln t}{t} \right]_m^a + \int_m^a \frac{1}{t^2} dt \right)$$

$$= \lim_{a \rightarrow +\infty} \left(-\frac{\ln a}{a} + \frac{\ln m}{m} + \left[-\frac{1}{t} \right]_m^a \right)$$

$$= \lim_{a \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln m}{m} - \frac{1}{a} + \frac{1}{m} \right)$$

$$= \frac{\ln m}{m} + \frac{1}{m} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln m}{m}$$

$$\text{Donc } \int_{m+1}^{+\infty} f(t) dt = \frac{\ln(m+1)}{m+1} + \frac{1}{m+1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln m}{m}$$

$$\text{car } \ln(m+1) = \ln m + \ln\left(1 + \frac{1}{m}\right) \underset{+\infty}{\sim} \ln m.$$

Par l'encadrement (*), on a

$$T_m \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln m}{m}.$$

Par la question 3), on a $R_m \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln m}{m}.$