Correction de la session 2 de 2017

Correction de l'exercice 1 :

Puisque les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$, la fonction $\varphi : t \in \mathbb{R} \longmapsto (u(t), v(t))$ est elle-aussi de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. De plus, la fonction f est polynomiale donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. Puisque l'on peut écrire $g = f \circ \varphi$, par composition, la fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Par la formule de dérivation en chaînes, on a

$$\begin{aligned} g'(0) &= \frac{\partial g}{\partial t}(0) \\ &= \frac{\partial f \circ \varphi}{\partial t}(0) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(0))\frac{\partial u}{\partial t}(0) + \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(0))\frac{\partial v}{\partial t}(0) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(0,-1)u'(0) + \frac{\partial f}{\partial y}(0,-1)v'(0) \\ &= 18 - 12 \\ &= 6 \end{aligned}$$

puisque

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 6xy + 2x - 6 \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3x^2 - 3.$$

Correction de l'exercice 2 :

Puisque $\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on peut utiliser les développements limités usuels :

$$\frac{1+\tan(1/n)}{1-\tan(1/n)} = \frac{1+1/n+o(1/n)}{1-1/n+o(1/n)} = \left(1+\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\left(1+\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = 1+\frac{2}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$$

ce qui entraîne

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{1+\tan(1/n)}{1-\tan(1/n)}\right) &= \ln\left(1+\frac{2}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &= \frac{2}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right) \\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{n} \end{aligned}$$

Puisque la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ diverge, par comparaison de séries à termes positives (au moins à partir d'un certain rang), la série donnée est divergente.

Correction de l'exercice 3 :

Notons $f : x \in [2;+\infty[\longmapsto \frac{1}{\sqrt{x}(x-1)^r}$. La fonction f est continue sur $[2;+\infty[$, à valeurs positives. Ainsi, la convergence de l'intégrale donnée équivaut à l'intégrabilité de f sur $[2;+\infty[$. Par continuité, f est intégrable sur tout segment de la forme $[2;A]$ avec $A > 2$. Lorsque $x \to +\infty$, on a

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x^{r+1/2}}$$

qui est intégrable sur $[A;+\infty[$ si et seulement si $r+\frac{1}{2}>1$, ce qui équivaut à $r>\frac{1}{2}$. Finalement, l'intégrale donnée converge si et seulement si $r>\frac{1}{2}$.

Correction de l'exercice 4 :

Soit $a\in\mathbb{R}^+$. Notons $u_n=\dfrac{a^n+2}{\sqrt{n}3^n+4}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. Comme $u_n>0$ pour tout n, on peut chercher à utiliser la règle de d'Alembert :

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{a^{n+1}+2}{\sqrt{n+1}3^{n+1}+4}\,\frac{\sqrt{n}3^n+4}{a^n+2}\\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{a^{n+1}+2}{a^n+2}\,\frac{\sqrt{n}3^n}{\sqrt{n+1}3^{n+1}}\\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{3}\,\frac{a^{n+1}+2}{a^n+2}\end{aligned}$$

- Si $a<1$, alors $a^n\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$ d'où $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\dfrac{1}{3}<1$, donc la série $\sum u_n$ converge.
- Si $a=1$, alors $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\dfrac{1}{3}<1$, donc la série $\sum u_n$ converge.
- Si $a>1$, alors $a^n\to+\infty$ lorsque $n\to+\infty$ d'où

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{3}\,\frac{a^{n+1}}{a^n}=\frac{a}{3}.$$

  → Si $1<a<3$, alors $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\dfrac{a}{3}<1$, donc la série $\sum u_n$ converge.

  → Si $a>3$, alors $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\dfrac{a}{3}>1$, donc la série $\sum u_n$ diverge (grossièrement).

  → Si $a=3$, on ne peut pas conclure par la règle de d'Alembert, mais

$$u_n=\frac{3^n+2}{\sqrt{n}3^n+4}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{3^n}{\sqrt{n}3^n}=\frac{1}{n^{1/2}}$$

  et la série $\sum u_n$ diverge par comparaison de séries à termes positifs et utilisation du critère de Riemann.

Finalement, l'ensemble des $a\in\mathbb{R}^+$ tels que la série $\sum u_n$ converge est $[0;3[$.

Correction de l'exercice 5 :

1. Soit $x\in\mathbb{R}^+$, si $x\neq 0$, on a

$$f_n(x)\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{n(x^3+x)e^{-x}}{nx}=(x^2+1)e^{-x}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}(x^2+1)e^{-x}.$$

   Si $x=0$, alors $f_n(x)=0\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$. Ainsi, la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers la fonction

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ & x & \longmapsto & \begin{cases} 0 \text{ si } x=0\\ (x^2+1)e^{-x} \text{ si } x>0\end{cases}\end{array}$$

2. Si $(f_n)_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$, c'est forcément vers sa limite simple f. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, la fonction f_n est continue sur $\mathbb{R}^+$ (comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas), alors que f est discontinue en 0 (puisque $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=1\neq f(0)$). La continuité étant préservée par passage à la limite uniforme, la suite $(f_n)_n$ ne peut pas converger uniformément sur $\mathbb{R}^+$.
3. La fonction g est dérivable sur $[a;+\infty[$ et pour tout $x\in[a;+\infty[$, on a

$$g'(x)=(2x-x^2-1)e^{-x}=-(x-1)^2e^{-x}\leq 0$$

donc g est décroissante sur $[a;+\infty[$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in [a;+\infty[$, on a

$$\begin{aligned}
|f_n(x) - f(x)| &= \left|\frac{n(x^3+x)e^{-x}}{nx+1} - (x^2+1)e^{-x}\right| \\
&= \left|\frac{nx}{nx+1} - 1\right| (x^2+1)e^{-x} \\
&= \frac{(x^2+1)e^{-x}}{nx+1} \\
&\leq \frac{(x^2+1)e^{-x}}{na+1} \qquad \text{car } nx+1 \geq na+1 > 0 \\
&\leq \frac{g(a)}{na+1} \qquad \text{par décroissance de } g \text{ sur } [a;+\infty[.
\end{aligned}$$

Ceci entraîne que la fonction $f_n - f$ est bornée sur $[a;+\infty[$, et puisque la borne supérieure d'un ensemble est le plus petit majorant de cet ensemble :

$$0 \leq \|f_n - f\|_{\infty;[a;+\infty[} = \sup_{x\in[a;+\infty[} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{g(a)}{na+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ car } a > 0.$$

Ainsi, la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément sur $[a;+\infty[$ vers la fonction f.

Correction de l'exercice 6 :

1. On se place dans le quart en haut à droite ($x \geq 0$ et $y \geq 0$), on trace les deux cercles d'équations respectives $x^2+y^2 = 4$ (cercle de centre $(0,0)$ et de rayon 2) et $x^2+y^2 = 25$ (cercle de centre $(0,0)$ et de rayon 5). Le domaine Ω est la partie de couronne comprise entre ces deux cercles (toujours dans la partie $x \geq 0$ et $y \geq 0$).

2. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On utilise les coordonnées polaires et on note $(x,y) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$ avec $r \in \mathbb{R}^+$ et $\theta \in [-\pi;\pi]$, alors on a

$$x \geq 0 \iff r\cos(\theta) \geq 0 \iff r = 0 \text{ ou } \cos(\theta) \geq 0 \iff r = 0 \text{ ou } \theta \in [-\pi/2;\pi/2],$$

$$y \geq 0 \iff r\sin\theta \geq 0 \iff r = 0 \text{ ou } \theta \in [0;\pi],$$

et enfin

$$4 \leq x^2+y^2 \leq 25 \iff 4 \leq r^2 \leq 25 \iff 2 \leq r \leq 5.$$

Le domaine Ω s'écrit donc comme $\Omega = \{(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) \mid \theta \in [0;\pi/2], 2 \leq r \leq 5\}$. D'après le dessin, le domaine Ω est simple, et ce que l'on vient de faire prouve qu'il est θ-élémentaire. Puisque la fonction à intégrer $(x,y) \longmapsto xy$ est continue sur Ω (car polynomiale), le théorème de changement de variables en polaires donne

$$\begin{aligned}
\iint_\Omega xy \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_{\theta=0}^{\pi/2}\int_{r=2}^{5} r^2\cos(\theta)\sin(\theta) r \,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{\pi/2} \cos(\theta)\sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta \times \int_2^5 r^3\,\mathrm{d}r \qquad \text{car les variables sont séparées} \\
&= \left[\frac{1}{2}\sin^2(\theta)\right]_0^{\pi/2} \times \left[\frac{r^4}{4}\right]_2^5 \\
&= \frac{(5^4-2^4)}{8} \\
&= \frac{609}{8}.
\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 8 :

1. Notons $f : (x,t) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto e^{-t^2+tx}$ de sorte que $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,t)\,\mathrm{d}t$.

   - La fonction f est continue, même de classe $\mathcal{C}^\infty$, sur $\mathbb{R}^2$ comme composée de la fonction exponentielle de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ avec la fonction polynomiale $(x,t) \longmapsto -t^2 + tx$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$.
   - Soient $x \in [-a;a]$ et $t \in \mathbb{R}$, alors
   $$|f(x,t)| = e^{-t^2} e^{tx} \leq e^{-t^2} e^{a|t|} := \varphi_a(t)$$
   car $xt \leq |xt| \leq a\,|t|$ donc par croissance de l'exponentielle, $e^{xt} \leq e^{a|t|}$. La fonction $\varphi_a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ est continue, donc intégrable sur tout segment inclus dans $\mathbb{R}$. De plus, elle est paire, donc il suffit d'étudier son intégrabilité au voisinage de $+\infty$. Par croissances comparées, on a
   $$t^2\varphi_a(t) = e^{2\ln(t) - t^2 + a|t|} \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{d'où} \quad \varphi_a(t) = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$$
   Comme $t \longmapsto \dfrac{1}{t^2}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$ par Riemann, par comparaison de fonctions positives, il s'ensuit que φ_a est intégrable sur $\mathbb{R}$.
   - Puisque la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, elle admet une dérivée partielle par rapport à sa première variable, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, qui est continue sur $\mathbb{R}^2$.
   - Soient $x \in [-a;a]$ et $t \in \mathbb{R}$, alors
   $$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = |t|\, e^{-t^2} e^{tx} \leq |t|\, e^{-t^2} e^{a|t|} := \psi_a(t).$$
   On montre de la même manière que ci-dessus que ψ_a est intégrable sur $\mathbb{R}$.

   D'après le théorème de dérivation par domination, la restriction de F à $[-a;a]$ est de classe $\mathcal{C}^1$. Comme ceci est vrai pour tout $a > 0$, on en déduit que la fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,
   $$F'(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty} +\infty t e^{-t^2} e^{tx}\,\mathrm{d}t.$$

2. Pour $x \in \mathbb{R}$, on a par intégration par parties généralisées avec les fonctions $u : t \longmapsto -\dfrac{1}{2}e^{-t^2}$ et $v : t \longmapsto e^{tx}$ de classe $\mathcal{C}^1$ (possible car tous les termes ci-dessous convergent), on trouve :
   $$\begin{aligned} F'(x) &= \left[-\frac{1}{2}e^{-t^2}e^{tx}\right]_{-\infty}^{+\infty} + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-t^2} e^{tx}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{x}{2}F(x) \quad \text{par croissances comparées.} \end{aligned}$$
   Ainsi, F est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $(E) : y' = \dfrac{x}{2}y$.

3. Par résolution de cette équation différentielle, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \lambda e^{x^2/4}$. On remarque que
   $$\lambda = F(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}$$
   d'où
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \sqrt{\pi}e^{x^2/4}.$$